JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgende Eigenschaften für den Sobolevraum $H^1(I)$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes, offenes Intervall ist.

a) Ist $f \in H^1(I)$, so gilt für fast alle $x_1, x_2 \in I$
$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx.$$

b) Sind umgekehrt $f, g \in L^2(I)$ und gilt
$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$
für fast alle $x_1, x_2 \in I$, so ist $f \in H(I)$ mit $f' = g$.

c) Es gilt $H^1(I) \subset C(\overline{I})$.

Bemerkung: Diese Aussagen gelten auch allgemeiner für $W^{1,p}, 1 \leq p < \infty$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Randwertproblem
$$\begin{cases} -\big(a(x)u'(x)\big)' = |x|, & x \in (-1,1), \\ \quad u(-1) = u(1) = 0, \end{cases}$$
wobei
$$a(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$
Geben Sie die schwache Formulierung des Problems an und bestimmen Sie die Lösung.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der Raum
$$W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) := \big\{u|_{\partial\Omega} : u \in W^{k,p}(\Omega)\big\} \subset L^p(\partial\Omega)$$
mit der Norm
$$\|g\|_{k-\frac{1}{p},p} := \inf\big\{\|u\|_{k,p} : u|_{\partial\Omega} = g\big\}$$
ein normierter Vektorraum ist. Beweisen Sie für $p = 2, k = 1$ die Vollständigkeit.

Besprechung in der Übung am 09.06.17