A1a

$f \in H^1(I)$, $I \underset{kp}{\subset} \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists\ f_k \in H^1(I) \cap C^\infty(I)$

mit $f_k \to f$ in $H^1(I)$ (*)

$L^2(I) \subset L^1(\Omega)$

$\forall x_1, x_2 \in I$ gilt

$$f_k(x_2) - f_k(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_k'(x)\,dx \qquad \text{HDI in } C^\infty(I).$$

Es gilt

$L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ für beschränkte Gebiete Ω.

$\overset{\text{Hölder}}{\int |1 \cdot u|\,dx \le \|1\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2}}$

Also $f_k \in H^1 \subset L^2 \subset L^1$.

Grenzwert rechte Seite:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f_k'(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right|$$

$$\le \int_I |f_k'(x) - f(x)|\,dx = \|f_k' - f\|_{L^1(I)}$$

$$\le \underbrace{\|1\|_{L^2(I)}}_{\text{const.}} \cdot \|f_k' - f\|_{L^2(I)} \xrightarrow{(*)} 0$$

GW linke Seite:

$$f_k(x_2) - f_k(x_1) \xrightarrow[k\to\infty]{TF} f(x_2) - f(x_1) \quad f.ü.$$

Denn:

<u>Lemma</u> [1.22(1) in Alt]

Seien $f_k \in L^p(Y)$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq p < \infty$.

Ist $f \in L^p(Y)$, so gilt

$$\|f - f_k\|_{L^p} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

folgt:

Es gibt eine Teilfolge $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sd

$$f_{k_i} \xrightarrow{i\to\infty} f \quad f.ü. \text{ in } Y.$$

A1b

Sei $\varphi \in C_c^\infty(I)$. Wähle $x_\pm \in I$ mit

$$\varphi(x) = 0 \qquad \forall x \in I \setminus (x_-, x_+)$$

Sowie $x_- = x_1$, $x_+ = x_2$, sd die Voraussetzungen erfüllt sind.
Dann gilt

$$\int_I f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{x_-}^{x_+} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - f(x_-)\big(\underbrace{\varphi(x_+) - \varphi(x_-)}_{=0 \,=\, \int_{x_-}^{x_+} \varphi'(x)\,dx}\big)$$

$$= \int_{x_-}^{x_+} \big(\underbrace{f(x) - f(x_-)}_{= \int_{x_-}^{x} g(x)\,dx \text{ (Vora)}}\big)\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_{x_-}^{x_+} \int_{x_-}^{x} g(y)\,\varphi'(x)\,dy\,dx$$

Diese Identität folgt aus dem Satz von Fubini. Siehe NR 1.

$$= \int_{x_-}^{x_+} \int_{y}^{x_+} g(y)\,\varphi'(x)\,dx\,dy = \int_{x_-}^{x_+} \underbrace{\int_{y}^{x_+} \varphi'(x)\,dx}_{= -\varphi(y)}\, g(y)\,dy$$

$$= -\int_{\substack{x_- \\ I}}^{x_+} g(y)\,\varphi(y)\,dy$$

$\boxed{\text{NR. 1}}$

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \int_a^b 1_{\{y \leq x\}}\, f(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \int_a^b 1_{\{y \leq x\}}\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b \int_y^b f(x,y)\, dx\, dy.$$

Beh $I = (a,b)$ beschr. offenes Intervall

$$H^1(I) \subset C(\overline{I}).$$

Bew

Sei $u \in H^1(I) \cap C^1(\overline{I})$. ($C^1 \overset{\text{dicht}}{\subset} C$ „spline interpol.")

Setze $m := \frac{1}{2} \int_I |u(x)|^2 \, dx \Rightarrow \exists\, x_0$ mit $m = |u(x_0)|^2$

$$|u(x)|^2 = \left| u(x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} (u(\xi)^2)' \, d\xi \right|$$

$$= \left| u(x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} 2u(\xi) \cdot u'(\xi) \, d\xi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_I |u(\xi)|^2 \, d\xi + 2 \int_{x_0}^{x} |u(\xi) \cdot u'(\xi)| \, d\xi$$

$\leftarrow$ Hölder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\leq \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + 2 \|u\|_2 \|u'\|_2$$

$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$

$$\leq \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2 \leq \frac{3}{2} \|u\|_{H^1}^2$$

Linke Seite „$\max_{x \in \bar{I}}$" folgt

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{3}{2}\|u\|_{H^1}^2$$

$\Rightarrow$ Für CF in $H^1 \cap C^1$ konv.

auch in $\|\cdot\|_\infty^2$, da C^1 vollständig

$\Rightarrow$ GW auch in $C^1(\bar{I})$.

Aufgabe 2

Bemerkung

$$f \in H^1(a,b) \Rightarrow f' \in L^2(a,b) \subset L^1(a,b),$$

falls zusätzlich $f' = 0$ in $\mathcal{D}'(a,b)$

folgt mit A1a) und $\int_a^b f' \, dx = 0$:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{für fast alle } x_1, x_2 \in (a,b).$$

Schwache Formulierung: Finde $u \in H_c^1((-1,1))$, sd

$$\int_{-1}^{1} a(x) u'(x) \varphi'(x) \, dx = \int_{-1}^{1} |x| \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((-1,1)) \tag{S}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{0} u'(x) \cdot \varphi'(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u'(x) \varphi'(x) dx = \int_{-1}^{0} x \, \varphi(x) dx + \int_0^1 x \, \varphi(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{0} u' \varphi' dx + \frac{1}{2} \int_0^1 u' \varphi' dx = -\left[\varphi(x) \tfrac{1}{2} x^2\right]_{x=-1}^{0} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \varphi'(x) \cdot x^2 \, dx$$

$$+ \left[\varphi(x) \tfrac{1}{2} x^2\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 \varphi'(x) \cdot x^2 \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{0} (u' - \tfrac{1}{2}x^2)\varphi'\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} (u' + x^2)\varphi'\,dx = 0 \qquad (S_1)$$

(S_1) gilt wieder für alle $\varphi \in C_c^{\infty}(-1,1)$. Wählen wir zunächst $\varphi \in C_c^{\infty}(-1,0)$ und anschließend $\varphi \in C_c^{\infty}(0,1)$:

$$\int_{-1}^{0} (u' - \tfrac{1}{2}x^2)\varphi'\,dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_c^{\infty}(-1,0)$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} (u' + x^2)\varphi'\,dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in C_c^{\infty}(0,1)$$

Bemerkung
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} u_1'(x) - \tfrac{1}{2}x^2 &= c_1 \\ u_2'(x) + x^2 &= c_2 \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} u_1 &= u|_{[-1,0)} \\ u_2 &= u|_{[0,1]} \end{aligned}$$

Integrieren:

$$u_1(x) = c_1 x + \tfrac{1}{6}x^3 + c_3, \qquad u_2(x) = c_2 x - \tfrac{1}{3}x^3 + c_4$$

Wegen $u(-1) = u(1) = 0$ folgt

$$-c_1 - \tfrac{1}{6} + c_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad c_2 - \tfrac{1}{3} + c_4 = 0.$$

Weiter muss wegen $u \in H^1(-1,1) \subset C([-1,1])$ (Aufgabe 1b)) gelten:

$$\lim_{x \nearrow 0} u_1(x) = u_2(0) \quad , \text{ also } \quad c_3 = c_4$$

Sei nun $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty((-\varepsilon, \varepsilon))$ für $0 < \varepsilon < 1$, z.B.

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2}{\exp(x^2 - \varepsilon^2)} & , \quad |x| < \varepsilon \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen in (S) ergibt:

$$\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{0} u_1' \varphi_\varepsilon' \, dx}_{= u_1'(\xi_1) \int_{-\varepsilon}^{0} \varphi_\varepsilon' \, dx = u_1'(\xi_1) \frac{1}{e}} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} u_2' \varphi_\varepsilon' \, dx}_{= - u_2'(\xi_2) \frac{1}{e}} = - \int_{-\varepsilon}^{0} x \varphi_\varepsilon \, dx + \int_{0}^{\varepsilon} x \varphi_\varepsilon \, dx$$

wobei $\xi_1 \in (-\varepsilon, 0)$ und $\xi_2 \in (0, \varepsilon)$ $(u_1 \in C^1(-1,0), u_2 \in C^1(0,1))$

Die rechte Seite konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0. Links $\varepsilon \to 0$ ergibt: $(u_1', u_2'$ stetig$)$

$$\lim_{\xi \nearrow 0} u_1'(\xi) - \frac{1}{2} \lim_{\xi \searrow 0} u_2'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2} c_2$$

Lösung LGS: $\quad c_1 = \frac{1}{18}, \quad c_2 = \frac{1}{9}, \quad c_3 = c_4 = \frac{2}{9}. \quad \square$

Aufgabe 3

zeige: normierter VR

(i) Sei $\|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} = 0$.

Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $W^{k,p}(\Omega)$, so dass $u_n|_{\partial\Omega} = g$ gilt und $\|u_n\|_{k,p} \to 0 \ (n\to\infty)$.

Mit dem Spursatz folgt:

$$\underbrace{\|g\|_{0,p,\partial\Omega}}_{\substack{W^{0,p}(\partial\Omega)=L^p(\partial\Omega)\\ \text{-Norm}}} = \|u_n|_{\partial\Omega}\|_{0,p,\partial\Omega} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spursatz, } Du,u \text{ in } W^{1,p} \text{ zusammengefasst.}}}{\leq} C_1\|u_n\|_{1,p} \overset{k\geq 1}{\leq} C_1'\|u_n\|_{k,p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Es folgt $\|g\|_{0,p,\partial\Omega} = 0$ und da $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{0,p,\partial\Omega})$ ein normierter VR ist, folgt $g = 0$.

Ist umgekehrt $g = 0$, so gilt für $u = 0 \in W^{k,p}(\Omega)$:

$$u|_{\partial\Omega} = 0 = g \quad \text{und folglich } \|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} = 0.$$

(ii) $\|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} \geq 0 \quad \forall\, g \in W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$

(iii) Sei $g \in W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Dann gilt:

$$\|\lambda g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} = \inf\{\|u\|_{k,p} : u \in W^{k,p}(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = \lambda g\}$$

$$\overset{|\lambda|>0}{=} \inf\{\|\lambda \tfrac{u}{\lambda}\|_{k,p} : u \in W^{k,p}(\Omega),\ \tfrac{u}{\lambda}|_{\partial\Omega} = g\}$$

$$= \inf\{\underbrace{\|\lambda v\|_{k,p}}_{=|\lambda|\|v\|_{k,p}} : v \in W^{k,p}(\Omega),\ v|_{\partial\Omega} = g\}$$

$$= |\lambda|\ \|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega}$$

(iv) Seien $g_1, g_2 \in W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Es gilt

$$\|g_1 + g_2\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} = \inf\{\|u\|_{k,p} : u \in W^{k,p}(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = g_1 + g_2\}$$

$$\leq \inf\{\underbrace{\|u_1 + u_2\|_{k,p}}_{\leq \|u_1\|_{k,p} + \|u_2\|_{k,p}} : u_i \in W^{k,p}(\Omega),\ u_i|_{\partial\Omega} = g_i,\ i = 1,2\}$$

$$\leq \|g_1\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} + \|g_2\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega},$$

also normierter VR.

Wir zeigen für $p=2$, $k=1$, also $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ ist vollständig.

Betrachte dazu das RWP

$$(*) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

$$u|_{\partial\Omega} = g.$$

Sei $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass $\bar{u}|_{\partial\Omega} = g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ und definiere $v := u - \bar{u}$. Für v erhalten wir das RWP:

$$(**) \quad \underbrace{\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + v\varphi \, dx}_{=:\, b[v,\varphi]} = \underbrace{\int_\Omega \nabla \bar{u} \cdot \nabla \varphi + \bar{u}\varphi \, dx}_{=:\, F[\varphi]} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen von Lax-Milgram:

$(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$ ist ein Hilbertraum.

(i) $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist eine Bilinearform und es gilt für $v, \varphi \in H_0^1(\Omega)$:

$$|b[v,\varphi]| \leq \|\nabla v\|_2 \|\nabla \varphi\|_2 + \|v\|_2 \|\varphi\|_2$$
$$\leq \|v\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2} + \|v\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2} = 2 \|v\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2}$$

(ii) $|b[v,v]| = \int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 \, dx = \|v\|_{1,2}$

(iii) $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist linear und es gilt

$$|F[\varphi]| \leq 2 \|\bar{u}\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2} = C \|\varphi\|_{1,2} \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

Das RWP (**) besitzt somit eine eindeutige Lsg $v^* \in H_0^1$.
Somit besitzt auch das RWP (*) eine Lsg
(beachte, die Wahl von $\bar{u}$ ist nicht eindeutig, deshalb folgt noch nicht die Eindeutigkeit der Lsg.)
Sind u_1, u_2 Lsgn von (*), so gilt für die Differenz $v = u_1 - u_2$:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + v\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \; v|_{\partial\Omega} = 0$$

Da dieses Problem nur die triviale Lsg besitzt,
folgt $v = 0$ und $u_1 = u_2$.

Definiere nun den Operator $A: W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$
durch $A[g] = u^*$, wobei u^* wie eben die eindeutige
Lsg des RWP $(*)$ ist. Zeige: A ist linear und beschränkt.

(i) Seien $g_1, g_2 \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow \alpha \cdot g_1 + \beta g_2 \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ und $A(\alpha g_1 + \beta g_2) = u$, mit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1, \; u|_{\partial\Omega} = \alpha g_1 + \beta g_2 .$$

Für $w = \alpha A[g_1] + \beta A[g_2] \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi + w\varphi \, dx = \alpha \int_\Omega \nabla(A[g_1]) \cdot \nabla \varphi + A[g_1]\varphi \, dx$$

$$+ \beta \int_\Omega \nabla(A[g_2]) \cdot \nabla \varphi + A[g_2]\varphi \, dx = 0$$

$$w|_{\partial\Omega} = \alpha (A[g_1])|_{\partial\Omega} + \beta (A[g_2])|_{\partial\Omega} = \alpha g_1 + \beta g_2$$

Also sind die Funktionen $A[\alpha g_1+\beta g_2]$ und

w beides Lsg von $(*)$ (mit $g=\alpha g_1+\beta g_2$).

$\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow}$ $$A[\alpha g_1+\beta g_2] = \alpha A[g_1] + \beta A[g_2].$$

(ii) Sei $u^* \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von $(*)$ und $\bar u \in H^1(\Omega)$ mit $\bar u|_{\partial\Omega} = g$. Dann ist $e := u^* - \bar u \in H_0^1(\Omega)$ und einsetzen von e in $(*)$ liefert:

$$\int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla(u^* - \bar u) + u^*(\bar u - u^*)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega |\nabla u^*|^2 + (u^*)^2\,dx}_{=\|u^*\|_{1,2}^2} = \int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla \bar u + u^* \bar u\,dx$$

$$\leq 2\|u^*\|_{1,2}\|\bar u\|_{1,2}$$

$$\Rightarrow \|u^*\|_{1,2} \leq 2\|\bar u\|_{1,2} \quad \forall\, \bar u \in H^1(\Omega) \text{ mit } \bar u|_{\partial\Omega} = g.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|u^*\|_{1,2}}_{=\|A[g]\|_{1,2}} \leq 2 \inf\{\|\bar u\|_{1,2} : \bar u \in H^1(\Omega),\ \bar u|_{\partial\Omega} = g\} = 2\|g\|_{\frac12,2,\partial\Omega}$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq 2.$$

Sei nun $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\left(W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega}\right)$

Definiere $u_n := A[g_n]$, $n \in \mathbb{N}$. $\rightarrow$ (u_n) Folge in $H^1(\Omega)$ mit

$$\|u_n - u_m\|_{1,2} \leq \underbrace{\|A\|}_{\leq 2} \|g_n - g_m\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega}.$$

$\Rightarrow$ (u_n) Cauchy in $H^1(\Omega)$

$(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$ Vollständig

$\Rightarrow$

$$\exists\, u \in H^1(\Omega) \text{ mit } \|u_n - u\|_{1,2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

setze $g := u|_{\partial\Omega} \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$

$$\rightsquigarrow \|g_n - g\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega} = \inf\{\|w\|_{1,2} : w \in H^1(\Omega),\, w|_{\partial\Omega} = g_n - g\}$$

$$(u_n - u)|_{\partial\Omega} = g_n - g \Rightarrow \leq \|u_n - u\|_{1,2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also gilt $g_n \rightarrow g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ und

$\left(W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega}\right)$ ist vollständig.

$\square$