JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie die Existenz eines $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, so dass $f \cdot \nu \geq 1$ auf $\partial\Omega$ (ν bezeichne die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$). Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet, d. h. zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Umgebung U von x_0, so dass sich der Rand von Ω in U als Graph einer $\mathcal{C}^1$-Funktion darstellen lässt.

Hinweis: Konstruieren Sie f zunächst lokal und verwenden Sie (ohne Beweis) den folgenden Satz, um f auf ganz Ω zu definieren:

Satz (Zerlegung der Eins): Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $V_1, \ldots, V_m \subset \mathbb{R}^d$ offene Mengen mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i.$$

Dann existieren $\varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(i = 1, \ldots, m)$, so dass $\operatorname{supp} \varphi_i \subset V_i$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ und $\varphi_1 + \cdots + \varphi_m = 1$ auf K gilt.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Beweisen Sie die Produktregel für Elemente $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Genauer: Zeigen Sie $u \cdot v \in W^{1,1}$ und

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = (\tfrac{\partial}{\partial x_i} f) \cdot g + f \cdot (\tfrac{\partial}{\partial x_i} g) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ für } i = 1, \ldots, d.$$

Aufgabe 2

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $r \in L^2(\Omega)$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\Delta\Delta u = r \text{ in } \Omega, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega.$$

Finden Sie die zugehörige schwache Formulierung des Problems und zeigen Sie, dass das schwach formulierte Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\inf \left\{ \frac{\|\Delta u\|_{L^2}}{\|u\|_{H^2}} : u \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\} \right\} > 0$ gilt.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = r(x), & \text{für } x \in \Omega, \\ v = 0, & \text{auf } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \mu} + \gamma v = 0, & \text{auf } \Gamma_1, \end{cases}$$

mit $a_{i,k} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ und $b_i, c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. Formulieren und beweisen Sie einen Satz analog zu Satz 4.4.

Besprechung in der Übung am 16.06.17