Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Geben Sie die schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{*}$$

an und beweisen Sie, dass (*) genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn $\int_\Omega f(x)dx = 0$ gilt.

Aufgabe 2

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und weiter gelten die Voraussetzungen $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $(i, j = 1, \dots, n)$ sowie $f \in L^2(\Omega)$.

Finden Sie die schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta\Delta u - \operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{in } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

(s. auch Blatt 7: Aufgabe 2) und leiten Sie für dieses Problem einen Alternativsatz her.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst eine passende Gårdingsche Ungleichung.

Aufgabe 3

Seien X, Y, Z Banachräume, $R : X \to X$, $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$ lineare Operatoren. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sind S und T beschränkt und S oder T kompakt, so ist $T \circ S$ kompakt.

b) Ist R kompakt, so ist auch R^2 kompakt.

c) Ist R^2 kompakt, so ist auch R kompakt.

d) Gilt $\dim(\mathcal{R}(S)) < \infty$, so ist S kompakt.

e) Gilt $\dim(\mathcal{R}(S)) < \infty$ und ist S beschränkt, so ist S kompakt.

f) Gilt $\dim(X) < \infty$, so ist S kompakt.

g) Gilt $\dim(Y) < \infty$, so ist S kompakt.

Besprechung in der Übung am 23.06.17