

Lösungsnotizen

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

Die schwache Formulierung des Neumann-Problems ist gegeben durch: Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx}_{=: B[u, \varphi]} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi \, dx}_{=: F[\varphi]} \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Es gilt:

$$B[u, u] = \|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_{1,2}^2 - \|u\|_2^2,$$

d.h. die Gårding'sche Ungleichung ist mit $\delta = 1$ und $\mu = 1$ erfüllt. Weiter ist jede Konstante eine Lösung des homogenen Problems. Mit dem Alternativsatz folgt nun, dass das inhomogene Problem genau dann lösbar ist, wenn $Kf \in (\text{Kern}(Id - K^*))^\perp$ gilt (beachte, dass $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$ ein Hilbertraum ist).

Erinnerung an die Definition von T und K : Es bezeichne $\hat{u}_f \in H^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung des Problems

$$(*_{\mu}) \quad B_{\mu}[u, \varphi] = B[u, \varphi] + \langle u, \varphi \rangle_{L^2} = F_f[\varphi] = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Es ist

$$T : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega), \quad f \mapsto \hat{u}_f$$

der Lösungsoperator, der $f \in L^2(\Omega)$ auf die Lösung $\hat{u}_f \in H^1(\Omega)$ des Problems $(*_{\mu})$ abbildet. T ist beschränkt und linear (s. Vorlesung). Weiter ist die Einbettung $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ kompakt und K ist definiert durch

$$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad u \mapsto i(Tu).$$

Wir zeigen nun: $K^* = K$, d.h. für alle $f, g \in L^2(\Omega)$ gilt $\langle Kf, g \rangle_{L^2} = \langle f, Kg \rangle_{L^2}$. Bezeichne mit $\hat{u}_f = T(f)$ bzw. $\hat{u}_g = T(g) \in H^1(\Omega)$ die Lösung von $(*_\mu)$ mit rechter Seite F_f bzw. F_g . Dann gilt:

$$B_\mu[\hat{u}_f, \varphi] = F_f[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \quad (1)$$

sowie

$$B_\mu[\hat{u}_g, \varphi] = F_g[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \quad (2)$$

Einsetzen von $\varphi = \hat{u}_g$ in (1) und $\varphi = \hat{u}_f$ in (2) liefert:

$$B_\mu[\hat{u}_f, \hat{u}_g] = F_f[\hat{u}_g] = \int_\Omega f \hat{u}_g dx \quad \text{und} \quad B_\mu[\hat{u}_g, \hat{u}_f] = F_g[\hat{u}_f] = \int_\Omega g \hat{u}_f dx$$

Wegen der Symmetrie von B_μ gilt nun:

$$\begin{aligned} \langle Kf, g \rangle_{L^2} &= \int_\Omega (Tf)g dx = \int_\Omega \hat{u}_f g dx = B_\mu[\hat{u}_f, \hat{u}_g] = B_\mu[\hat{u}_g, \hat{u}_f] \\ &= \int_\Omega \hat{u}_g f dx = \int_\Omega f(Tg) dx = \langle f, Kg \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Damit folgt, dass das ursprüngliche Randwertproblem eine eindeutige Lösung besitzt, genau dann wenn $Kf \in (\text{Kern}(Id - K))^\perp$ gilt, d.h. $\langle Kf, v \rangle_{L^2} = 0$ für alle $v \in H^1(\Omega)$ mit $(Id - K)v = 0 \iff Kv = v$. Die letzte Bedingung ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + v \varphi dx &= \int_\Omega v \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \\ \iff \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi dx &= 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \\ \iff v &= \text{const.} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} Kf \in (\text{Kern}(Id - K))^\perp &\iff \int_\Omega Kf dx = 0 \iff \underbrace{\int_\Omega \hat{u}_f dx}_{=B_\mu[\hat{u}_f, 1]=F_f[1]} = 0 \\ &\iff \int_\Omega f dx = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die schwache Formulierung des Randwertproblems ist gegeben durch: Finde $u \in H_0^2(\Omega)$ mit

$$\underbrace{\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi + (\nabla u)^T A \nabla \varphi + b \cdot \nabla u \varphi + cu \varphi dx}_{=: B[u, \varphi]} = \underbrace{\int_\Omega f \varphi dx}_{=: F[\varphi]} \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega).$$

Es gilt: $(H_0^2(\Omega), \|\cdot\|_{2,2})$ ist ein Hilbertraum und B ist eine Bilinearform auf $H_0^2(\Omega)$. Mit dem Hinweis aus Aufgabe 19 gilt: Es ex. $C_1 > 0$ mit $\|\Delta u\|_2^2 \geq C_1 \|u\|_{2,2}^2$ für alle $u \in H_0^2(\Omega)$. Wir zeigen zunächst, dass eine zur Garding-Ungleichung analoge Ungleichung gilt. Sei $u \in H_0^2(\Omega)$. Dann gilt (beachte, dass a_{ij} und b_i beschränkt sind):

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (\nabla u)^T A \nabla u dx \right| &\leq \|\nabla u\|_2 \|A \nabla u\|_2 \leq C_2 \|\nabla u\|_2^2 \\ \left| \int_\Omega (b \cdot \nabla u) u dx \right| &\leq C_3 \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B[u, u] &= \|\Delta u\|_2^2 + \int_{\Omega} [(\nabla u)^T A \nabla u + (b \cdot \nabla u) u + cu^2] dx \\
&\geq C_1 \|u\|_{2,2}^2 - C_2 \|\nabla u\|_2^2 - C_3 \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 - \|c\|_{\infty} \|u\|_2^2 \\
&\stackrel{\text{Young}}{\geq} C_1 \|u\|_{2,2}^2 - C_2 \|\nabla u\|_2^2 - \frac{C_3}{2} (\varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_2^2) - \|c\|_{\infty} \|u\|_2^2 \\
&= C_1 \|u\|_{2,2}^2 - \|\nabla u\|_2^2 (C_2 + \frac{C_3}{2} \varepsilon) - \|u\|_2^2 (\frac{C_3}{2\varepsilon} + \|c\|_{\infty})
\end{aligned}$$

Wir schreiben $\|\nabla u\|_2^2$ als Integral und integrieren partiell:

$$0 \leq \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} \Delta u u dx \leq \|\Delta u\|_2 \|u\|_2 \leq \frac{1}{2} (\lambda \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{\lambda} \|u\|_2^2).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
B[u, u] &\geq C_1 \|u\|_{2,2}^2 - \frac{\lambda}{2} (C_2 + \frac{C_3}{2} \varepsilon) \underbrace{\|\Delta u\|_2^2}_{\leq \tilde{C} \|u\|_{2,2}^2} - \|u\|_2^2 (\frac{C_3}{2\varepsilon} + \|c\|_{\infty} + \frac{1}{2\lambda} (C_2 + \frac{C_3}{2} \varepsilon)) \\
&\geq \underbrace{C_1 - \tilde{C} \frac{\lambda}{2} (C_2 + \frac{C_3}{2} \varepsilon)}_{=: \delta} \|u\|_{2,2}^2 - \|u\|_2^2 \underbrace{(\frac{C_3}{2\varepsilon} + \|c\|_{\infty} + \frac{1}{2\lambda} (C_2 + \frac{C_3}{2} \varepsilon))}_{=: \mu}
\end{aligned}$$

Wähle nun $\lambda > 0$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\delta > 0$ gilt.

Definiere $B_{\mu} : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $B_{\mu}[u, v] = B[u, v] + \mu \langle u, v \rangle_{L^2}$. Es gilt:

(a) B_{μ} beschränkt:

$$|B_{\mu}[u, v]| \leq |B[u, v]| + \mu \langle u, v \rangle_{L^2} \leq \underbrace{\|\Delta u\|_2 \|\Delta v\|_2 + C \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} + \mu \|u\|_2 \|v\|_2}_{\leq \tilde{C} \|u\|_{2,2} \|v\|_{2,2}} \leq (\tilde{C} + C + \mu) \|u\|_{2,2} \|v\|_{2,2}$$

(b) B_{μ} elliptisch wegen der obigen Gårding-Ungleichung

Mit dem Lemma von Lax-Milgram folgt, dass das RWP

$$B_{\mu}[u, \varphi] = \hat{F}[\varphi] = \int_{\Omega} \hat{r} \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega)$$

eine eindeutige Lösung $\hat{u} \in H_0^2(\Omega)$ besitzt für jedes $\hat{r} \in L^2(\Omega)$. Definiere den Lösungsoperator

$$T : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^2(\Omega), \quad \hat{r} \mapsto \hat{u}.$$

Linearität und Beschränktheit von T zeigt man wie in der Vorlesung. Definiere

$$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad u \mapsto \mu i_2(Tu)$$

wobei $i_2 : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ die Einbettung von $H^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ ist. Ist i_1 die Einbettung von $H^2(\Omega)$ nach $H^1(\Omega)$ so gilt $i_2 = i \circ i_1$. Da $i_1 : H^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ beschränkt ($\|i_1(u)\|_{1,2} = \|u\|_{1,2} \leq \|u\|_{2,2}$) und $i : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ kompakt, ist i_2 ebenfalls kompakt und es folgt die Kompaktheit von K .

Transformiere nun das Randwertproblem:

$$B[u, \varphi] = \int_{\Omega} r \varphi dx = F[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow B_{\mu}[u, \varphi] = F[\varphi] + \mu \langle u, \varphi \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} (r + \mu u) \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \text{Finde } u \in H_0^{2,2}(\Omega) \text{ mit } u = T(r + \mu u)$$

$$\Leftrightarrow \text{Finde } u \in L^2(\Omega) \text{ mit } u = T(r + \mu u) = Tr + \mu Tu$$

$$\Leftrightarrow \text{Finde } u \in L^2(\Omega) \text{ mit } u = \underbrace{Tr}_{=: s} + \mu i_2(u) = s + Ku$$

Da K kompakt ist, erhalten wir mit der Fredholm-Alternative den folgenden

Satz

Entweder

- (i) das homogene Problem $u \in H_0^2(\Omega) : B[u, \varphi] = 0 \forall \varphi \in H_0^2(\Omega)$ besitzt nur die triviale Lösung und das inhomogene Problem $B[u, \varphi] = \int_{\Omega} r \varphi dx \forall \varphi \in H_0^2(\Omega)$ besitzt eine eindeutige Lösung für alle $r \in L^2(\Omega)$

oder

- (ii) Das homogene Problem besitzt nicht-triviale Lösungen und das inhomogene Problem ist nicht für alle $r \in L^2(\Omega)$ lösbar. Besitzt das inhomogene Problem eine Lösung, so ist sie nicht eindeutig. Eine Lösung existiert, falls $Kr \in (\text{Kern}(Id - K^*))^\perp$ gilt.

Aufgabe 3

- a) wahr: Sei $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in H . Dann besitzt $(Tu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Tu_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Da S linear und beschränkt, ist S stetig und somit $(S(Tu_{k_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent. Dies beweist die Kompaktheit von $S \circ T$. Andererseits folgt mit der Beschränktheit von S die Beschränktheit der Folge $(S(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ und die Kompaktheit von T impliziert, dass $(T(S(u_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Also ist auch $T \circ S$ kompakt.

- b) wahr, da jeder kompakte Operator beschränkt ist. Verwende a)

Beweis von T kompakt $\Rightarrow T$ beschränkt: Angenommen, T wäre nicht beschränkt. Dann ex. Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|u_k\| = 1$ und $\|Tu_k\| \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$. Da $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt, besitzt $(Tu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Tu_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_{k_n}\| \leq C < \infty$.

- c) falsch: Wähle $H = l^2$ und $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots)$. Dann ist $T^2 = 0$ kompakt, aber für die Folge $(e_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ gilt: $(e_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt ($\|e_{2n}\| = 1$) aber $(Te_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (e_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

- d) falsch (falls $\dim H = \infty$): In jedem Hilbertraum ex. eine algebraische Basis (Hamelbasis), d.h. $B = \{x_i, i \in I\}$ und jedes $x \in H$ lässt sich eindeutig darstellen durch $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ wobei nur endlich viele $\alpha_i \neq 0$ sind (jedes x ist endliche Linearkombination der x_i). O.B.d.A. gelte $\mathbb{N} \subset I$ und $\|x_i\| = 1$.

Sei nun T der lineare Operator mit $Tx_i = ix_1$ für $i \in \mathbb{N}$, $Tx_i = x_1$ sonst. Dieser ist auf ganz H definiert, da B algebraische Basis. Offenbar gilt $\dim(\text{Bild } T) = 1 < \infty$, aber für die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\|x_i\| = 1, \quad \text{und} \quad \|Tx_i\| = \|ix_1\| = i \rightarrow \infty \quad (i \rightarrow \infty),$$

d.h. $(Tx_i)_{i \in \mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

- e) Ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt (da T beschränkt) und liegt in einem endlich-dimensionalen Teilraum von H . Nach Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte Folge (in einem endlich-dimensionalen VR) eine konvergente Teilfolge und somit ist T kompakt.