Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Seien A, B symmetrische und positiv semidefinite Matrizen, i. A. gilt nicht, dass AB positiv semidefinit ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(AB) \geq 0$.

Aufgabe 2

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ erfülle

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) \leq 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{*}$$

Geben Sie ein Beispiel für Ω, u und c an, so dass $\max\left\{u(x) : x \in \overline{\Omega}\right\} > 0$.

Aufgabe 3

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und

$$L[u] := \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x)$$

ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit beschränkten Koeffizientenfunktionen a_{ij}, b_i, c $(i, j = 1, \ldots, d)$. Zeigen Sie:
Falls eine Funktion $h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ existiert mit $Lh > 0$ in Ω und $h > 0$ in $\overline{\Omega}$, so gilt:

$$\left[u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}),\ Lu \leq 0 \text{ in } \Omega,\ u \leq 0 \text{ auf } \partial\Omega\right] \Rightarrow u \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

Hinweis: Betrachten Sie $u - \mu_0 h$ wobei $\mu_0 = \inf\left\{\mu > 0 : u - \mu h \leq 0 \text{ in } \overline{\Omega}\right\}$ und zeigen Sie durch Widerspruch $\mu_0 = 0$.

Besprechung in der Übung am **07.07.17**.