Aufgabe 1

Zeige zunächst, dass aus A, B symmetrisch und pos. semidef. i. A. nicht folgt: $A \cdot B$ pos. semdef.:

Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EW $\quad 1, 3 \quad ; \quad 1, 15$

$\rightarrow \quad A, B$ pos. semidef.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 30 & 1 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$ (A·B nicht symmetrisch)

Wähle $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x^T (AB)\, x = -2 < 0$

$\Rightarrow \quad A \cdot B$ nicht pos. semidef.

A sym. + pos. semidef:

A besitzt reelle EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \quad (A \in \mathbb{R}^{n,n})$

und es ex. unitäre Matrix Q $\quad (Q^T Q = I)$

mit $A = Q^T D Q$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Definiere $D^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ und

$$A^{\frac{1}{2}} = Q^T D^{\frac{1}{2}} Q$$

$$\Rightarrow A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}} = \ldots = A$$

($A^{\frac{1}{2}}$ Wurzel von A), $A^{\frac{1}{2}}$ ebenfalls symm. und pos. semidef. (einfaches nachrechnen)

Es gilt außerdem

$$\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$$ (nachrechnen Matrix-Multiplikation)

Somit folgt:

$$\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} B) = \mathrm{Spur}(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})$$

und wegen $x^T A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}} x \underset{y = A^{\frac{1}{2}} x}{=} y^T B y \underset{B \text{ pos. semidef.}}{\geq} 0$

ist $A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}$ symm. pos. semidef.

$$\Rightarrow \mathrm{Spur}(A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}) \geq 0.$$

Aufgabe 2

Wähle $\Omega = (0,1)^2$, $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$

$c(x,y) = -8\pi^2$

$\Rightarrow -\Delta u(x,y) = +4\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + 4\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$
$= 8\pi^2 u(x,y)$

$\Rightarrow \quad -\Delta u(x,y) - 8\pi^2 u(x,y) = 0 \quad$ in Ω

$u(x,y) = 0 \quad$ auf $\partial\Omega$

aber $u(x,y) > 0$ für $x,y \in (0,\frac{1}{2}) \times (0,\frac{1}{2})$
$\cup (\frac{1}{2},1) \times (\frac{1}{2},1)$

$\rightsquigarrow$ Vorzeichenbedingung an c im Maximumsprinzip wesentlich!

Aufgabe 3

Ω sei ein beschränktes Gebiet!

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $Lu \leq 0$ in Ω und $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$.

Sei $\mu_0 := \inf \{ \mu > 0 : u - \mu h \leq 0 \text{ in } \overline{\Omega} \}$

Wir zeigen: $\mu_0 = 0$

Zunächst gilt: $\{ \mu > 0 : u - \mu h \leq 0 \text{ in } \overline{\Omega} \} \neq \emptyset$,

da für $\mu \geq \dfrac{\|u\|_\infty}{\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} h(x)}$ gilt:

$$\mu h \geq \|u\|_\infty \cdot \underbrace{h \cdot \frac{1}{\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} h(x)}}_{\geq 1} \geq \|u\|_\infty \geq u$$

$\Rightarrow$ $u - \mu h \leq 0$ in $\overline{\Omega}$

$\Rightarrow$ $\underset{(\text{def. } \mu_0)}{\mu_0 \in [0, \infty)}$ und es gilt:

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} (u(x) - \mu h(x)) \longrightarrow 0^- \quad \text{für } \mu \searrow \mu_0 \quad (*)$$

Für $x \in \partial\Omega$ und $\mu > \mu_0$ gilt:

$$u(x) - \mu h(x) \overset{u \le 0 \text{ auf } \partial\Omega}{\le} -\mu h(x) \overset{\mu > 0}{\le} -\mu \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) < 0 \quad (**)$$

dies gilt auch für $\mu := \mu_0$, falls $\mu_0 > 0$!

<u>Angenommen</u> $\mu_0 > 0$

$(**) \Rightarrow$ $u - \mu h < 0$ auf $\partial\Omega$. Wegen $(*)$ folgt, dass für $\mu > \mu_0$ mit $|\mu - \mu_0|$ klein die Funktion $u - \mu h$ ihr Maximum (welches negativ ist) in einem innern Punkt $x_\mu \in \Omega$ annimmt.

Max. $\Rightarrow$ $\nabla (u - \mu h)(x_\mu) = 0$ und

Hessematrix $\dfrac{\partial^2 (u - \mu h)}{\partial x_i \partial x_j}(x_\mu)$ negativ semi-definit

$\rightsquigarrow A = (-a_{ij})_{ij}$ negativ semidef.

a_{ij} elliptisch $\Rightarrow$

$$L(u - \mu h)(x_\mu) \ge c(x_\mu)(u - \mu h)(x_\mu)$$

<u>Auf. 1</u>: $\operatorname{Spur}(-A)(-H) \ge 0$
+grad $= 0$

$\geq c^+(x_\mu)(u-\mu h)(x_\mu) = c^+(x_\mu)\max(u-\mu h)$

$\uparrow$

positive Anteil.

Betrachte Folge $\mu_n \to \mu_0$ und dazugehörige Folge der Maxima x_{μ_n}. (x_{μ_n}) beschränkt und somit ex. Teilfolge, die gegen $x^* \in \overline{\Omega}$ konvergiert.

Wegen $(*)$, $(**)$ gilt: $x^* \notin \partial\Omega$ und somit

$$L(u-\mu_0 h)(x^*) \geq \limsup_{n\to\infty}\Big[\underbrace{c^+(x_{\mu_n})}_{\text{beschr.}}\underbrace{\max_{x\in\overline{\Omega}}(u(x)-\mu_n h(x))}_{\to 0}\Big] \overset{(*)}{=} 0$$

L linear

$\Rightarrow \quad Lu(x^*) \geq \mu_0 Lh(x^*) > 0 \quad$ da $\mu_0 > 0$ und $Lh > 0$

$\lightning$ zu $Lu \leq 0$

$\Rightarrow \mu_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u \leq 0 \quad$ in $\overline{\Omega}$.