JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Sei $(Y, \|\cdot\|)$ ein reeller Banachraum. Beweise Sie folgende Aussagen:

a) Der Raum $Z := Y \oplus i\,Y$ mit $\|\cdot\|_Z$ gegeben durch $\|u\|_Z := \sup_{\phi\in[0,2\pi]} \|Re(e^{i\phi}u)\|$ ist ein komplexer Banachraum.

b) Für $A \in L(Y,Y)$ erfüllt die Komplexifizierung $\tilde{A} \in L(Z,Z)$ gegeben durch

$$\tilde{A}(x+iy) := Ax + iAy$$

die Eigenschaft $\|\tilde{A}\|_{L(Z,Z)} = \|A\|_{L(Y,Y)}$.

Aufgabe 2

a) Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrischen Sesquilinearform auf einem komplexem Vektorraum. Beweisen Sie

(a) $\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2\big(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle\big)$,

(b) $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y,x-y\rangle\big)$,

(c) $\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle x-iy,x-iy\rangle - \langle x+iy,x+iy\rangle\big)$.

b) Sei I eine Indexmenge und $(\varphi_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem eines unitären Raumes H. Beweisen Sie: Wenn H separabel ist, ist I höchstens abzählbar.

c) Es sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem von H. Dann sind äquivalent

(a) $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Orthogonalbasis von H.

(b) $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle\varphi_n, u\rangle|^2 \ \forall u \in H$

(c) $\langle u,v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle\varphi_n, u\rangle}\langle\varphi_n, v\rangle \ \forall u,v \in H$

(d) Ist $u \in H$ und gilt $\langle\varphi_n, u\rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt $u = 0$.

d) Es sei $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent

(a) Für $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$, $u_n \to u \in \mathcal{D}(A)$ folgt $Au_n \to Au$.

(b) $\sup_{u\in\mathcal{D}(A), \|u\|=1} \|Au\| =: \|A\| < \infty$

Besprechung in der Übung am 07.07.17 um **8 Uhr** im Raum 2.67.