Aufgabe 1a)

Beh $\|\cdot\|_Z := \sup_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\phi}u)\|$ Norm

Bew:

(i) $\|u\|_Z = 0 \Leftrightarrow u = x+iy = 0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$

(ii) $\lambda\in\mathbb{C}: \|\lambda u\|_Z = \sup_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i\phi}(\lambda u))\|$

$\left[\lambda = |\lambda| e^{i\arg(\lambda)} \leftarrow \text{polar Koordinaten}\right]$

$= \sup_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(|\lambda| e^{i\phi + i\cdot\arg(z)} u)\|$

$= |\lambda| \sup_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(e^{i(\phi+\arg(z))} u)\| = |\lambda|\|u\|_Z$

(iii) $\|u+v\|_Z = \sup_{\phi\in[0,2\pi]} \|\mathrm{Re}\, e^{i\phi}(u+v)\|$

$\leq \sup_{\phi\in[0,2\pi]} (\|\mathrm{Re}\, e^{i\phi}u\| + \|\mathrm{Re}\, e^{i\phi}v\|) \leq \|u\|_Z \|v\|_Z$

Beh $Z = Y \oplus iY$ vollständig

Bew Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in Z, also

zu $\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ mit $\|u_n-u_m\|_Z \leq \varepsilon$ $\forall n,m\geq N$,

$u_n = x_n + iy_n$

$\Rightarrow \|u_n-u_m\| \geq \|\mathrm{Re}(u_n-u_m)\| = \|x_n-x_m\|$

$\|u_n-u_m\| \geq \|\mathrm{Re}(e^{-\frac{\pi}{2}i}(u_n-u_m))\| = \|y_n-y_m\|$

$\Rightarrow (x_n),(y_n)$ cauchy in Y. $\square$

Aufgabe 1.b)

Für $u \in \mathcal{Y}$ gilt: $\|u\|_Z = \|u\|_{\mathcal{Y}}$

$\Rightarrow \|\tilde{A}u\|_Z = \|Au\|_{\mathcal{Y}} \quad \forall u \in \mathcal{Y}$

$\Rightarrow \|\tilde{A}\|_{L(Z)} \geq \|A\|_{L(\mathcal{Y})}$.

Ferner gilt für alle $u \in Z$:

$$\|\tilde{A}u\|_Z \overset{\tilde{A} \text{ linear}}{=} \sup_{\phi \in [0,2\pi]} \|\mathrm{Re}(\tilde{A}e^{i\phi}u)\|_{\mathcal{Y}}$$

$$= \sup_{\phi} \|A\,\mathrm{Re}(e^{i\phi}u)\|_{\mathcal{Y}} \leq \|A\|\,\|u\|_Z \qquad \square$$

$e^{i\phi}u = \mathrm{Re}(e^{i\phi}u) + i \cdot \mathrm{Im}(e^{i\phi}u)$ + def von $\tilde{A}$.

Aufgabe 2a

Einfaches Rechnen. Benutze

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z + \bar{z})$$

für $z = \langle x, y \rangle$.

Aufgabe 10.2 b

Es gilt $\|e_i - e_j\|^2 = \langle e_i - e_j, e_i - e_j \rangle$

$i \neq j$ $= \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1} - \langle e_i, \overbrace{e_j \rangle}^{=0} - \langle \overbrace{e_j, e_i}^{=0} \rangle + \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1}$

$= 2$

also $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}, \quad i \neq j.$ (1)

$\Rightarrow$ $B_{\frac{1}{4}\sqrt{2}}(e_i)$, $i \in I$ ist Familie disjunkter Mengen

Sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dichte Folge in H (seperabell)

def.
$\Rightarrow$ Zu jedem $i \in I$ $\exists$ $n(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$h_{n(i)} \in B_{\frac{1}{4}\sqrt{2}}(e_i).$$

$\Rightarrow$ $i \longmapsto n(i)$ Abbildung, welche wegen (1) injektiv ist. (disjunkte Kugeln)

$\Rightarrow$ $\exists$ n^{-1} (Linksinverses) mit

$n^{-1}: n(I) \subset \mathbb{N} \to I$ surjektiv,

also I abzählbar.

$\square$

Aufgabe 2c)

$$a \Rightarrow c \overset{\text{klar}}{\Rightarrow} b \overset{\text{klar}}{\Rightarrow} d \Rightarrow a$$

a ⇒ c:

ONB ⇒ $\forall u \in H$: $u = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n, u \rangle e_n$, also

$$\langle u, v \rangle = \langle \sum_k \langle e_k, u \rangle e_k, \sum_l \langle e_l, v \rangle e_l \rangle$$

$$= \sum_{k,l} \overline{\langle e_k, u \rangle} \langle e_l, v \rangle \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{= \delta_{kl}}$$

$$= \sum_k \overline{\langle e_k, u \rangle} \langle e_k, v \rangle$$

d ⇒ a

$\forall N, c$

Lemma 1.6: $\|u - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, u\rangle e_n\|$

$\leq \|u - \sum_{n=0}^{N} c_n e_n\|$

Sei $u_N = \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, u\rangle e_n$,

Bchp: $\exists\ \tilde{u} := \lim_{N\to\infty} u_N$ in H.

$\|u_N\| = \|u_N - u + u\| \leq \underbrace{\|u_N - u\|}_{\underset{L1.6}{\leq \|u\|}} + \|u\|$

$\leq 2\|u\|$

$\Rightarrow \|u_N\|^2 \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{N} |\langle e_n, u\rangle|^2 \leq 4\|u\|^2$

def. von ONS fällt doppelsumme weg.

⇒ Reihe konvergiert (nur pos. Summanden + beschränkt).

⇒ u_N cauchy in H + H vollständig: ✓

Beh $u - \tilde{u} = 0$

Nach Vora reicht zz $\langle e_n, u - \tilde{u} \rangle = 0 \quad \forall n$:

$$\langle e_n, u - \tilde{u} \rangle = \lim_{N \to \infty} \underbrace{\langle e_n, u - u_N \rangle}_{(*)}$$

$$(*) = \langle e_n, u - \sum_{k=0}^{N} \langle e_k, u \rangle e_k \rangle$$

$$= \langle e_n, u \rangle - \sum_{k=0}^{N} \langle e_k, u \rangle \underbrace{\langle e_n, e_k \rangle}_{= \delta_{nk}}$$

$$= \langle e_n, u \rangle - \langle e_n, u \rangle$$

$$= 0 \qquad \forall \; N \geq n$$

Für festes n wähle $N \geq n$. $\square$

Aufgabe 2.d)

„⇒"

A stetig: zu $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ mit

(*) $|u| < \delta \Rightarrow |Au| < \varepsilon$.

Für $\|u\| < 1 \Rightarrow \|\delta u\| = \delta \|u\| \leq \delta$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\delta \|Au\| = \|A\delta u\| \leq \varepsilon = 1$

$\Rightarrow$ $\|Au\| \leq \frac{1}{\delta}$ $\forall u \in \mathcal{D}(A), \|u\| \leq 1$.

„⇐" Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta \leq \frac{\varepsilon}{\|A\|}$.

Dann: $\forall u \in \mathcal{D}(A)$, $\|u\| < \delta$

$$\Rightarrow \|Au\| = \left\| \|u\| A \frac{u}{\|u\|} \right\| = \underbrace{\|u\|}_{< \delta \leq \varepsilon} \left\| A \frac{u}{\|u\|} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\|A\|} \|A\|$$

$$= \varepsilon$$