Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

a) Sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein **nicht** abgeschlossener Operator. Zeigen Sie: Wenn man die Resolvente von A wie im abgeschlossenen Fall definiert, so folgt

$$\sigma(A) = \mathbb{C}, \quad \rho(A) = \emptyset.$$

b) Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X, \quad u \mapsto -\frac{d^2}{dx^2}u.$

(i) Sei $X = L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist.

(ii) Sei $X = L^2(0,\infty)$, $\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{C}_c^2[0,\infty) \cap X : u'' \in X; u(0) = 0\}$. Zeigen Sie: Es gibt keinen Eigenwert, aber es gilt $[0,\infty) \subset \sigma(A)$.

(iii) Sei $X = L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}) \cap X : u'' \in X\}$. Zeigen Sie: Es gibt keinen Eigenwert, aber es gilt $[0,\infty) \subset \sigma(A)$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Satz 3.9 aus der Vorlesung:
Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:

a) A ist selbstadjungiert;

b) A ist abgeschlossen und $\mathcal{N}(A^* \pm i) = \{0\}$;

c) $\mathcal{R}(A \pm i) = H$.

Aufgabe 3

Sei $L \geq 1$ und $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ eine L-periodische Funktion, also $u(x) = u(x+L)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für jedes $k \geq 1$ existiert eine Konstante $C(k)$, unabhängig von u, $0 < \varepsilon \leq 1$ und L so, dass gilt

$$\|u\|_\infty^2 \leq \varepsilon \|D^k u\|^2 + C\varepsilon^{-1/(2k-1)}\|u\|^2.$$

Verwenden Sie für den Beweis die diskrete Fouriertransformation

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{L}}\hat{u}(n)\exp(\tfrac{2\pi i n x}{L}), \text{ wobei}$$

$$\hat{u}(n) = \tfrac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L u(x)\exp(-\tfrac{2\pi i n x}{L})dx.$$

Besprechung in der Übung am 14.07.17 um **8 Uhr** im Raum 2.67.