Aufgabe 1

a) $\sigma(A) = \mathbb{C} \Leftrightarrow \rho(A) = \emptyset$

$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) : D(A) \to X$ bijektiv und $(A-\lambda I)^{-1}$ beschränkt $\}$

Lemma 1.14:

$A$ abg. $\wedge$ $A$ invertierbar $\Rightarrow$ $A^{-1}$ abg.

($\Leftarrow$)

$A^{-1}$ nicht abg

$\Rightarrow$ $A$ nicht abg oder $A$ nicht invertierbar.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ bel.
Setze „$A = (A - \lambda I)^{-1}$":

$A - \lambda I$ nicht abg

$\Rightarrow$ $(A - \lambda I)^{-1}$ nicht abg. oder $(A - \lambda I)^{-1}$ nicht inv.bar

Es gilt: $A - \lambda I$ nicht abg., da $A$ nicht abg.

Fall 1: nicht invertierbar $\Rightarrow \lambda \notin \rho(A)$ ✓

Fall 2: $(A-\lambda I)^{-1}$ nicht abg.

Lemma 1.13

siehe def. $\rho(A)$

$\Rightarrow \quad \mathcal{D}((A-\lambda I)^{-1}) = X$ nicht abg.

(ist immer abg.)

oder

$(A-\lambda I)^{-1}$ nicht beschränkt

$\Rightarrow \lambda \notin \rho(A)$ ✓

$\square$

A1 b (i)

$u_n \subset D(A)$ $u_n \to u$ in $L^2$, $Au_n \to v$ in $L^2$

$\Rightarrow \|u'\|_2^2 = \int u'u' = -\int u u''$

$\leq \|u\|_2 \|u''\|_2$

$\Rightarrow u_n \to u$ in $H^2 \Rightarrow v = u$ in $L^2$.

Siehe Vorlesung: Bsp nach Korollar 3.10.

(ii) + (iii)

Kein EW: siehe VL: Bsp. nach Satz 3.2.

$[0,\infty) \subset \sigma(A)$: Verwende Satz 3.12.

Siehe dazu VL Beweis von Satz 3.13

Für (ii) verwende $\chi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,\ x \geq 3 \\ 1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Abschätzungen liefert $2n$ statt $4n$.

Aufgabe 2

Lemma Sei $A: \mathcal{D}(A) \to H$ linear und dicht definiert.

(1) Es gilt $\mathcal{N}(A^* \mp i) = \mathcal{R}(A \pm i)^\perp$.

$= \{ v \in H : \forall u \in \mathcal{R}(A \pm i) : \langle u, v \rangle = 0 \}$

(2) $A$ abgeschlossen und symmetrisch $\Rightarrow$ $\mathcal{R}(A \pm i)$ abgeschlossen.

---

Wir beweisen zunächst das Lemma.

(1) "$\supseteq$" Sei $y \in \mathrm{Bild}(A+i)^\perp$. Dann gilt $\langle (A+i)z, y\rangle = 0 = \langle z, 0\rangle$ für alle $z \in D(A)$. Nach Definition des adjungierten Operators folgt $(A^* - i)y = 0$, d.h. $y \in \mathrm{Kern}(A^* - i)$.

"$\subseteq$" Sei $y \in \mathrm{Kern}(A^* - i)$. Dann gilt für alle $z \in D(A)$: $0 = \langle z, (A^* - i)y\rangle = \langle (A+i)z, y\rangle$, also $y \in \mathrm{Bild}(A+i)^\perp$.

Beachte, dass aus der Aussage insbesondere folgt: (*)

$$\mathrm{Kern}(A^* \mp i) = \{0\} \iff \mathrm{Bild}(A \pm i) \text{ dicht in } H.$$

(2) Da $A$ symmetrisch ist, gilt $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in D(A)$ (denn $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$). Es folgt

$$\|(A+i)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, ix\rangle = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2.$$

Also existiert $(A+i)^{-1} : \mathrm{Bild}(A+i) \to D(A)$ und ist stetig. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A)$ mit $(A+i)x_n \to y \in \overline{\mathrm{Bild}(A+i)}$. $((A+i)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge in $\mathrm{Bild}(A+i)$ und mit der Stetigkeit von $(A+i)^{-1}$ folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $D(A)$ ist. Somit existiert $\lim_{n\to\infty} x_n =: x \in H$ und es gilt $Ax_n \to y - ix$. Da $A$ abgeschlossen ist, ist $x \in D(A)$ und $y - ix = Ax$, d.h. $y = (A+i)x \in \mathrm{Bild}(A+i)$. Für $A - i$ zeigt man die Behauptung analog.

(*) Da das orthogonale Komplement immer abgeschlossen ist.

Wir beweisen nun Satz 3.9.

Wir zeigen (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i):

(i) ⇒ (ii): Nach Aufgabe 31 folgt aus der Selbstadjungiertheit von $A$ die Abgeschlossenheit von $A$. Sei nun $x \in \mathrm{Kern}(A^* + i)$, d.h. $\|(A^* + i)x\| = 0$. Da $A^*$ insbesondere symmetrisch ist, folgt aus dem Beweis des Hilfslemmas $0 = \|(A^* + i)x\|^2 \geq \|x\|^2$, also $x = 0$. Analog zeigt man die Implikation für $A^* - i$.
(ii) ⇒ (iii): Mit Teil (1) aus dem Hilfslemma folgt: $\mathrm{Bild}(A \pm i)$ dicht in $H$ und Teil (ii) impliziert die Abgeschlossenheit von $\mathrm{Bild}(A \pm i)$. Also folgt $\mathrm{Bild}(A \pm i) = H$.

(iii) ⇒ (i): Nach Definition gilt wegen der Symmetrie von $A$: $D(A) \subseteq D(A^*)$ und $Ax = A^*x$ für alle $x \in D(A)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen: $D(A^*) \subseteq D(A)$. Sei dazu $y \in D(A^*)$. Wegen $A^* : D(A^*) \to H$ gilt dann $(A^* - i)y \in H$ und nach Voraussetzung ex. ein $x \in D(A)$ mit

$$(A^* - i)y = (A - i)x.$$

Da $Ax = A^*x$ für alle $x \in D(A)$ folgt

$$(A^* - i)y = (A^* - i)x \;\Rightarrow\; (A^* - i)(y - x) = 0 \;\Rightarrow\; y - x \in \mathrm{Kern}(A^* - i)$$

Mit dem Hilfslemma erhalten wir $y - x \in \mathrm{Bild}(A + i)^\perp \overset{\text{(iii)}}{=} H^\perp = \{0\}$ und schließlich $y = x \in D(A)$.