Aufgabe 3

$u'' + \lambda u = 0$ Fundamentallösungen: $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$

$u(0) = u(L)$
$u'(0) = u'(L)$ $\Rightarrow$ $e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$

$\overset{VL}{\Rightarrow}$ $e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ ist ONB [Die genauen Überlegungen überlasse ich dem Leser]

Blatt 10 A2c)

$\rightsquigarrow$ $$\|D^j u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^{2j} |\hat{u}(n)|^2 \quad (*)$$

$$L|u(x)|^2 \overset{C.S.}{\leq} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)|^2\right]$$

$$= \left[\sum_n |\hat{u}(n)| (\varepsilon|2\pi n/L|^k + 1)(\varepsilon|2\pi n/L|^k + 1)^{-1}\right]^2$$

$$\leq \left[\sum_n |\hat{u}(n)|^2 (\varepsilon|2\pi n/L|^k + 1)^2\right]\left[\sum_n (\varepsilon|2\pi n/L|^k + 1)^{-2}\right]$$

$$=: P_1 \cdot P_2$$

Es gilt $$(\varepsilon|2\pi n/L|^k + 1)^2 \leq 2\varepsilon^2|2\pi n/L|^{2k} + 2$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad P_1 \leq 2\varepsilon^2 \|D^k u\|^2 + 2\|u\|^2.$$

$$P_2 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\varepsilon (2\pi n/L)^k + 1\right]^{-2}$$

$$\leq 1 + 2\int_0^{\infty} \left[\varepsilon (2\pi n/L)^k + 1\right]^{-2} dn$$

$$= 1 + 2\varepsilon^{-1/k} \frac{L}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[y^k + 1\right]^{-2} dy$$

$$\leq c_k (1 + \underbrace{\varepsilon^{-1/k} L}_{\geq 1}) \leq 2 c_k \varepsilon^{-\frac{1}{k}} L .$$

$$\Rightarrow \quad |u|_\infty^2 \leq L^{-1} P_1 P_2$$

$$\leq 4 c_k \varepsilon^{2-\frac{1}{k}} \| D^k u \|^2 + 4 c_k \varepsilon^{-\frac{1}{k}} \|u\|^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{\varepsilon} = 4 c_k \varepsilon^{2-\frac{1}{k}}$$

$\square$