Institut für Analysis

JProf. Dr. Jens Rottmann-Matthes
M.Sc. Robin Flohr

Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1

Sei H ein Hilbertraum und $A : \mathcal{D}(A) \to H$ linear, dicht definiert, positiv semi-definit und selbstadjungiert. Beweisen Sie, dass $\mathcal{R}(A - \lambda I) = H$ für alle $\lambda < 0$.

Aufgabe 2

Sei der lineare Differentialoperator

$$\begin{aligned} P : H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) &\to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \\ u &\mapsto u'' + B(x)u' + C(x)u \end{aligned}$$

mit

$$B(x) := \begin{cases} B_- & , x \leq 0 \\ B_+ & , x > 0 \end{cases}, \qquad C(x) := \begin{cases} C_- & , x \leq 0 \\ C_+ & , x > 0 \end{cases},$$

wobei $B_\pm, C_\pm \in \mathbb{R}^{m,m}$ Matrizen. Zeigen Sie:

$$\sigma(P) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists \omega \in \mathbb{R} \text{ mit } \det(-\omega^2 I_m + i\omega B_\pm + C_\pm - \lambda I_m) = 0 \right\}$$

Aufgabe 3

Sei H ein separabler Hilbertraum und $K : H \to H$ symmetrisch und kompakt. Zeigen Sie:

a) Die Eigenwerte von K haben keinen Häufungspunkt ungleich 0.

b) Jeder Eigenwert $\neq 0$ hat endliche Vielfachheit.

Besprechung in der Übung am 21.07.17 um **8 Uhr** im Raum 2.67.