– Blatt 12 –

Aufgabe 1

In Verallgemeinerung zum Lemma von Blatt 11 Aufgabe 2 kann man analog beweisen:

$T : \mathcal{D}(T) \to H$ linear und dicht definiert

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp .$$

<u>Beh</u> $\mathcal{R}(A - \lambda I) = H \quad \forall \lambda < 0$

<u>Bew</u> zeige $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ abg.:

Es gilt (vgl. Bew. B11 A2) $\forall x \in \mathcal{D}(A)$

$$\|(A - \lambda I)\|^2 \overset{A\text{ symm.}}{=} \|Ax\|^2 - 2\lambda \langle Ax, x\rangle + \lambda^2 \|x\|^2$$

$$\underset{\lambda < 0}{\overset{A\text{ pos. semidef.}}{\geq}} \|Ax\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 \geq \lambda^2 \|x\|^2$$

$\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I) : \mathcal{D}(A) \to H$ injektiv

$\Rightarrow (A - \lambda I)^{-1} : \mathcal{R}(A - \lambda I) \to \mathcal{D}(A)$ ex. und stetig.

Argumente wie zuvor $\leadsto$ $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ abg.

<u>Zeige:</u> $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ dicht in H

$A-\lambda I$ injektiv $\Rightarrow$ $\mathcal{N}(A-\lambda I) = \{0\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ dicht in H

$\square$

Aufgabe 2

Sei $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \omega \in \mathbb{R} : \det(-\omega^2 I + i\omega B_\pm + C_\pm - \lambda I) = 0\}$

$\det \ldots = 0 \iff A$ nicht invertierbar, also

$\exists\, v_+$ oder v_- mit $v_\pm \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$:

$$-\omega^2 v_\pm + i\omega B_\pm v_\pm + C_\pm v_\pm - \lambda v_\pm = 0$$

OBdA: $\| v_\pm \|_{L^2} = 1$, wir beweisen für v_+, v_- analog

Setze $g_+(x) = e^{i\omega x} v_+$

$\Rightarrow \quad (P - \lambda I) g_+(x) = 0$ für $x \geq 0$

Nun analog weiter wie in Satz 3.13 mit Verwendung von Satz 3.12 ((Charakterisierung des Spektrums).

$$z(x) = \begin{cases} 1, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \quad x \geq 4 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ supp $= [1,4]$

$z_n(x) = z\left(\frac{x}{n}\right) \quad n \in \mathbb{N}_1 \rightsquigarrow$ supp $= [1n, 4n]$

Setze $f_n = z_n(\cdot)\, e^{i\omega \cdot}\, v_+$, v_- analog.

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z_n^2\, dx \geq 1 \cdot n \longrightarrow \infty$$

$$f_n' = \frac{1}{n} z'\left(\frac{x}{n}\right) \cdot e^{i\omega x} v_+ + z_n(x) e^{i\omega x} v_+ \cdot i\omega$$

$$f_n'' = \frac{1}{n^2} z''\left(\frac{x}{n}\right) \cdot e^{i\omega x} v_+ + \frac{1}{n} z'\left(\frac{x}{n}\right) \cdot e^{i\omega x} v_+ \cdot i\omega$$

$$+ \frac{1}{n} z'\left(\frac{x}{n}\right) e^{i\omega x} v_+ i\omega - z_n(x) e^{i\omega x} v_+ \omega^2$$

$$= -\omega^2 f_n + 2 z_n' \underbrace{e^{i\omega x} \cdot i\omega}_{= f} v_+$$

$$+ z_n'' \cdot f$$

Setze $u_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|_{L^2}}$ erfüllt $\|u_n\| = 1$

$$\|(P-\lambda I)u_n\|_{L^2}^2 = \| u_n'' + B(x)u_n' + C(x) f_n - \lambda u_n\|_{L^2}^2$$

$\operatorname{supp} f_n = [n, 2n]$

$$\overset{d}{=} \| -\omega^2 f_n + 2 z_n' e^{i\omega x} \cdot i\omega v_+ + z_n'' \cdot f$$

$$+ B_+[z_n' f + z_n f \cdot i\omega] + C_+ f_n - \lambda f_n \|_{L^2}^2 \cdot \|f_n\|_{L^2}^{-2}$$

$$\leq \|f_n\|_{L^2}^{-2} \cdot C \cdot \int_n^{4n} \Big(\underline{-\omega^2 v_+} + 2\tfrac{1}{n} i\omega v_+ + \tfrac{1}{n^2} v_+$$

$$+ B_+ [\tfrac{1}{n} v_+ + \underline{i\omega v_+}] + \underline{C_+ v_+} - \underline{\lambda v_+}\Big)^2 dx$$

$\|z_n'\|_\infty, \|z_n''\|_\infty$

$$\leq \|f_n\|_{L^2}^{-2} \cdot C \cdot \int_n^{4n} \left(\frac{2\omega}{n} + \frac{1}{n^2} + B_+ \frac{1}{n} \right)^2 dx$$

$$= \|f_n\|_{L^2}^{-2} \cdot C \cdot \underbrace{\int_n^{4n} dx}_{=3n} \; (\ldots)^2$$

$$= \|f_n\|_{L^2}^{-2} \cdot C \cdot 3 \underbrace{\left(\frac{2\omega}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} + B_+ \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 dx}_{\to 0}$$

Aufgabe 3

a) Ann: $\lambda \neq 0$ ist ein Häufungspunkt der Eigenwerte von K.

$\Rightarrow \exists$ eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \to \lambda$ und $\lambda_n \neq \lambda_m \; \forall n \neq m$, sowie $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$.

(*) Es gilt $\| e_n - e_m \| = \sqrt{2}$ (haben wir bei einer anderen Aufgabe schon gezeigt)

$\{e_n : \|e_n\| \leq 1\}$ ist beschränkte TM von H, weil K kompakt

$\Rightarrow \{ K e_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist relativ kompakte TM von H

$\overset{!}{\Leftrightarrow} \exists$ konvergente Teilfolge $(K e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ mit GW in X

$$\Rightarrow \quad e_n = \frac{K e_n}{\lambda_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}'$$

ist konvergente Folge, aber $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$

und jede konv. Folge muss CF sein!

b) Ann: $\lambda \neq 0$ ist EW mit unendlicher Vielfachheit.

$\Rightarrow$ Eigenraum hat unendliche Dimension.

Wähle eine unendliche Orthonormalbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Der Eigenraum ist durch $\mathcal{N}(K - \lambda I)$ gegeben, also durch einen UVR, der selber wieder abgeschlossen ist (vgl. VL Bew. Korollar 2.7)

Also ist der Eigenraum durch ONB $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wieder ein Hilbertraum, insbesondere vollständig.

Analog zu a) bekommen wir $e_n = \frac{K e_n}{\lambda}$ $n \in \mathbb{N}$

Folge, diesmal Folge mit GW in $\mathcal{N}(K - \lambda I)$,

aber e_n kein CF. $\lightning$