

# Rand- und Eigenwertprobleme, Sommersemester 17

## Aufgabenblatt 13

### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass

$$K_0 : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$$
$$u \mapsto \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

sowie

$$K : L^2([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow L^2([a, b], \mathbb{C})$$
$$u \mapsto \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

ein kompakter Operator ist, wenn  $G$  die Eigenschaften 0.) - 5.) aus Satz II.2.2 besitzt.

### Vorbereitung auf die mündliche Prüfung:

### Aufgabe 2

Geben Sie die schwache Formulierung eines streng elliptischen Randwertproblems an.

- Diskutieren Sie Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.
- Wie werden die Randbedingungen behandelt?
- Was ist die Spurabbildung?
- Welche Voraussetzungen sind nötig? Wie lassen sie sich abschwächen?
- Formulieren und Sie das Lemma von *Lax-Milgram* und geben Sie die Ideen des Beweises.
- Diskutieren Sie die Fredholmsche Alternative.
- Diskutieren Sie die Regularität einer Lösung mit Beweisideen im Spezialfall.

### Aufgabe 3

Diskutieren Sie Eigenschaften von linearen Operatoren auf separablen Hilberträumen.

- Diskutieren Sie ONS, ONB sowie ihre Abzählbarkeit und Existenz.
- Geben Sie die Definition von: linear, stetig, kompakt, Hermitesch, symmetrisch, selbstadjungiert und abgeschlossenem Operator.

c) Was wissen Sie über  $A = -u''$ ,  $D(A) = H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ ?

#### **Aufgabe 4**

Diskutieren Sie die Eigenwertprobleme.

- a) Geben Sie die Definition von: Eigenwert, Eigenraum, Hauptraum, Resolventenmenge, Resolvente, Spektrum, Punktspektrum, Essentielles Spektrum und reinem Punktspektrum.
- b) Was wissen Sie über Eigenwerte und Eigenelemente?
- c) Wie lässt sich das Spektrum charakterisieren?
- d) Wie sieht das Spektrum aus von  $A = -u''$ ,  $D(A) = H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ ?

#### **Aufgabe 5**

Diskutieren Sie die Eigenwertprobleme im Speziellen für kompakte Operatoren.

- a) Was weiß man über die Eigenwerte und Eigenelemente?
- b) Diskutieren Sie die Existenz eines Eigenwertes und über eine ONB aus Eigenelementen.
- c) Diskutieren Sie die Anwendung auf PDEs.
- d) Diskutieren Sie die Anwendung auf ODEs.