Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 10
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (4 Punkte, 1,5 Vortragspunkte)
Gegeben sei der Vektorraum $V := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{Der Grad von } P \text{ ist kleiner als 4. }\}$.

(a) Zeige, dass die Differentiation

$$D: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

eine lineare Abbildung ist.

(b) Gib eine Basis $b_0, \dots, b_3$ von V an und bestimme bezüglich dieser die Abbildungsmatrix von D.

Aufgabe 2 (4 Punkte, 1 Vortragspunkt für (a), 1,5 Vortragspunkte für (b))
Sei $D\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Drehung oder Drehspiegelung um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ mit Abbildungsmatrix M, also $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix mit $M \cdot M^\top = 1$.

(a) Zeige, dass es einen eindimensionalen Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $D(x) = x$ oder $D(x) = -x$ für alle $x \in A$ gilt. Ist A eindeutig? Welche geometrischen Bedeutungen kann A haben?
Hinweis: Betrachte das charakteristische Polynom von D.

(b) Sei nun speziell $A = \langle (1,1,1)^\top \rangle$ und $D(x) = x$ für alle $x \in A$. Sei weiter $D((6,0,0)^\top) = (2 + 2\sqrt{3}, 2, 2 - 2\sqrt{3})^\top$. Bestimme den Kosinus des Drehwinkels von D.

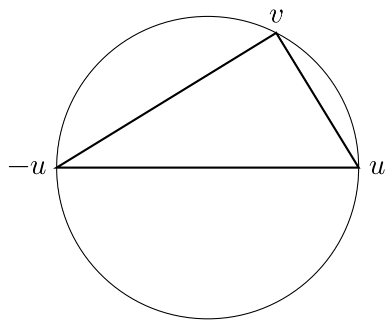
– bitte wenden –

Aufgabe 3 (8 Punkte, je 1 Vortragspunkt für (a) und (b), 2 Vortragspunkte für (c))

(a) Zeige, dass für jede positive reelle Zahl r gilt:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\} = \{(r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(b) Seien $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und $u, v \in K$ zwei Punkte auf diesem Kreis mit $v \neq \pm u$. Zeige mit den Eigenschaften des Skalarprodukts, dass die Vektoren u, $-u$ und v die Ecken eines – bezüglich des Standardskalarprodukts – rechtwinkligen Dreiecks bilden.



(c) Zeige: Für $u := (1, 0)^\top$ gibt es einen Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$ durch u und $-u$, sodass für alle $v \in K \cap \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ die beiden Strecken von u zu v und $-u$ zu v einen Winkel von 45° einschließen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14. Januar 2015, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.