Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 11
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (3 Punkte, 1,5 Vortragspunkte)
Es sei die folgende affine Abbildung φ gegeben:

$$\varphi\colon x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass φ eine *Schubspiegelung* ist. Finde dazu eine Gerade g und einen Vektor a parallel zu g derart, dass φ die Spiegelung an g mit anschließender Translation um a ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte, 1 Vortragspunkt für (a), 1,5 Vortragspunkte für (b) und (c))
Jede affine Abbildung Φ des $\mathbb{R}^2$ lässt sich durch $\tilde{\Phi}((x,y,1)^\top) = (\Phi((x,y)^\top)^\top, 1)^\top$ als Abbildung der Ebene $E := \{(x,y,1)^\top \in \mathbb{R}^3\}$ auffassen.

(a) Zeige: Es gibt eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sodass für die Abbildung

$$\Psi_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & Mx \end{array}$$

gilt: $\Psi_M|_E = \tilde{\Phi}$.

(b) Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade mit Richtungsvektor $n := (\cos(t), \sin(t))^\top$, für $t \in \mathbb{R}$, und $a \in g$ orthogonal zu n. Finde eine möglichst einfache Matrix $M_{n,a}$, sodass $\Psi_{M_{n,a}}|_E$ der Spiegelung an g entspricht.

(c) Widerlege oder beweise: Für jedes g wie in (b) gibt es eine eigentliche Bewegung[1] D des $\mathbb{R}^3$ sodass $D|_E = \Psi_{M_{n,a}}|_E$ gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte, 1,5 Vortragspunkte je Teilaufgabe)
Zeige, dass für Isometrien des $\mathbb{R}^2$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) Die Komposition zweier Spiegelungen an parallelen Geraden entspricht einer Translation.

(b) Die Komposition zweier Spiegelungen an Ursprungsgeraden entspricht einer Drehung um den Ursprung. Bestimme den Drehwinkel in Abhängigkeit des Schnittwinkels der Geraden.

(c) Folgere aus (b), dass die Komposition zweier Spiegelungen an nicht parallelen Geraden stets einer Drehung um den Schnittpunkt entspricht.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21. Januar 2015, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.

---

[1] Eine eigentliche Bewegung ist eine Isometrie $x \mapsto Ax + b$ mit $\det(A) = 1$.