Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 12
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (3 Punkte, 1,5 Vortragspunkte)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ und}$$
$$f(1) = 1.$$

Zeige zunächst induktiv, dass $f(\sum_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt und anschließend, dass $f(r) = r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 2 (2 Punkte, 1 Vortragspunkt)
Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{2}{k}) = \sum_{k=1}^{n+1} k$$

Aufgabe 3 (5 Punkte, 2 Vortragspunkte)
Betrachte die Fibonacci-Zahlenfolge $(F_n)_{n\geq 0}$, die wie folgt definiert ist:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (*)$$
$$F_0 = 1,\ F_1 = 1$$

Finde eine explizite Formel für F_n.
Hinweis: Wähle zunächst den Ansatz $F_n = \lambda^n$ und bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$, die $(*)$ erfüllen. Beachte außerdem, dass für zwei Lösungen λ^n und μ^n von $(*)$ auch $\alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ eine Lösung von $(*)$ ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte, 2 Vortragspunkte je Teilaufgabe)
Seien $a > 0$, $x_0 > 0$ und durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ eine reelle Folge gegeben.

(a) Zeige induktiv, dass $x_n \geq x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ für alle $n \geq 1$ gilt und folgere, dass $(x_n)_n$ eine konvergente Folge ist.

(b) Zeige, dass $(x_n)_n$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28. Januar 2015, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.