Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 13
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (4 Punkte, 1 Vortragspunkt je Teilaufgabe)
Gesucht sind positive Lösungen der Gleichung

$$x = f(x) \text{ für } f(x) = 1 + \arctan(x) \tag{F}$$

(a) Zeige, dass es ein $b_0 > 1$ gibt, sodass f auf jedem Intervall $I = [1, b]$ mit $b \geq b_0$ eine kontrahierende Selbstabbildung ist. Folgere, dass es eine positive Lösung x^* von (F) gibt.

(b) Zeige, dass für $b = 1000$ und einen beliebigen Startwert $x_0 \in [1, b]$ spätestens nach 40 Fixpunktiterationen eine Approximation an x^* mit Genauigkeit 10^{-8} gefunden ist, also $|x_{40} - x^*| < 10^{-8}$ für $x_{n+1} := f(x_n)$ gilt.

Aufgabe 2 (8 Punkte, je 1,5 Vortragspunkte für b, c und d)
Eine Population von Fischen reproduziert sich in Jahreszyklen gemäß

$$a_{n+1} = a_n(\alpha - \beta a_n)$$

mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$ und gegebenem $a_0 \in \mathbb{N}$. Nun werden pro Jahr $\gamma \geq 0$ Fische gefangen. Damit ergibt sich als neues Reproduktionsgesetz:

$$a_{n+1} = a_n(\alpha - \beta a_n) - \gamma$$

(a) Überführe $(a_n)_n$ mit einer geeigneten Transformation in eine neue Folge $(b_n)_n$, sodass mit geeignetem $\gamma' \in \mathbb{R}$ gilt:

$$b_{n+1} = b_n(\alpha - b_n) - \gamma'$$

(b) Finde nun alle positiven Fixpunkte der Funktion $f(s) = s(\alpha - s) - \gamma'$ und entscheide, ob diese anziehend oder abstoßend sind.

(c) Bestimme graphisch das Verhalten der Population für $\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2 - 1 < \gamma' < \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2$.

(d) Zeige, dass in den folgenden Fällen die Population in endlicher Zeit ausstirbt:

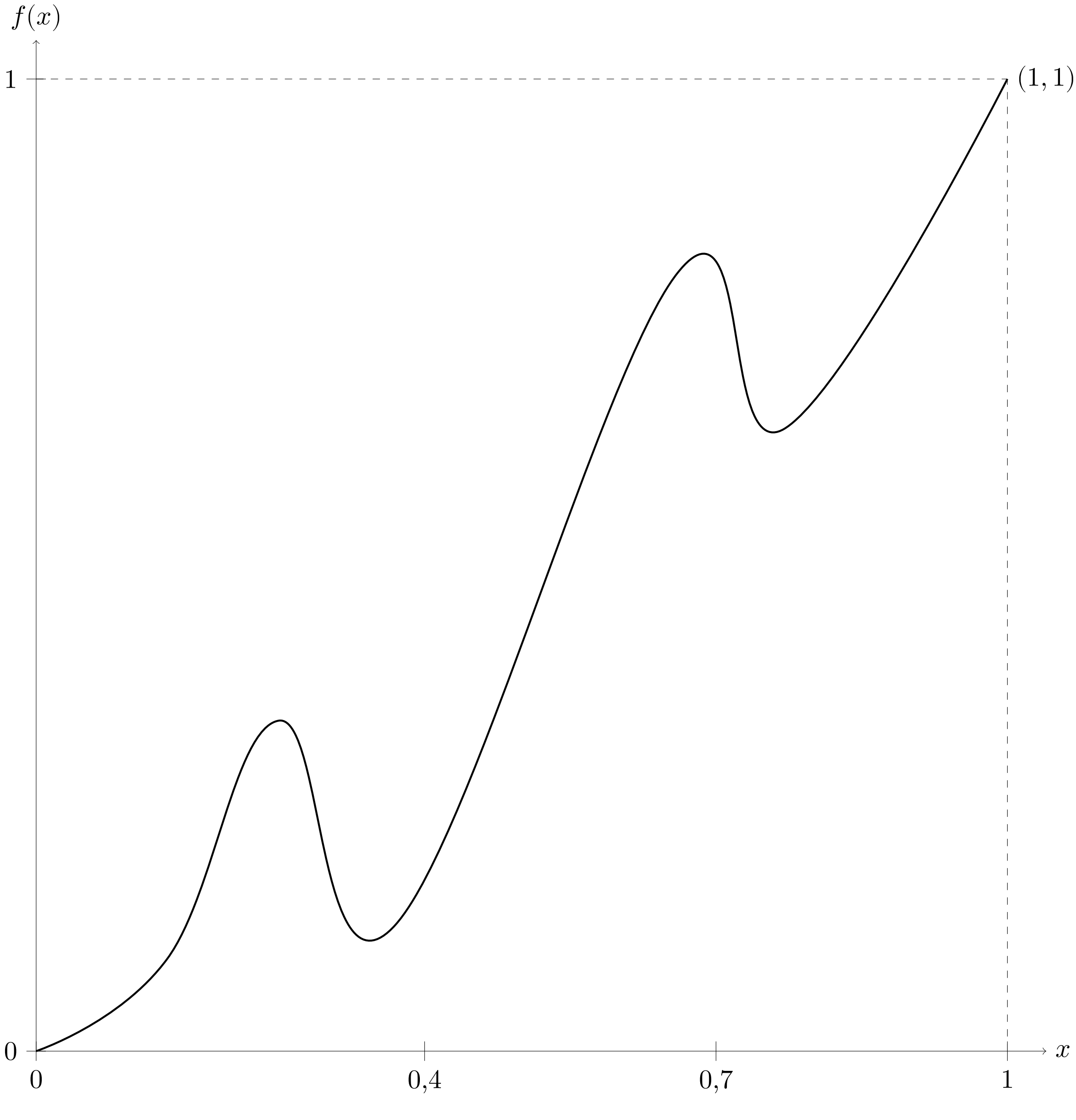
(i) $0 \leq \alpha \leq 1$, $\gamma' > 0$

(ii) $0 \leq \alpha < 1$, $\gamma' \geq 0$

(iii) $\gamma' > \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2$

(e) Der Wert $\gamma' = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2$ bzw. $\gamma = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2/\beta$ heißt *größtmöglicher nachhaltiger Ertrag.* Warum?

Aufgabe 3 (4 Punkte, 2 Vortragspunkte)
Gegeben sei die Funktion f, deren Graph unten gezeichnet ist. Markiere für jeden Fixpunkt x von f den Punkt $(x, f(x))$ in der Zeichnung. Finde einen Startwert $x_0 > 0{,}4$ sodass die durch $x_{n+1} := f(x_n)$ gegebene Folge gegen einen Fixpunkt konvergiert. Mache die von dir vermutete Konvergenz durch Einzeichnen des aus der Vorlesung bekannten Streckenzugs zur Folge $(x_n)_n$ glaubhaft.
Gibt es einen Startwert $x_0 > 0{,}7$, sodass $(x_n)_n$ gegen 0 konvergiert? Zeichne eine entsprechende Folge oder begründe mit geometrischen Argumenten, warum ein solcher Startwert nicht existiert.



Abgabe: Bis Mittwoch, den 4. Februar 2015, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.