Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 14
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1

Gegeben sei die lineare Rekursionsgleichung

$$S_{n+2} = 2 \cdot (S_{n+1} - S_n) + 1, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{IH}$$

und die dazu gehörende homogene Gleichung

$$S_{n+2} = 2 \cdot (S_{n+1} - S_n), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{H}$$

(a) Bestimme zwei linear unabhängige reelle Folgen[1] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die (H) erfüllen, d.h. für $S_n = a_n$ bzw. $S_n = b_n$ soll jeweils (H) gelten.
Hinweis: Nutze Aufgabe 2 (b) als Ansatz.

(b) Finde mit der in der Vorlesung vorgestellten Methode eine konstante Lösung von (IH) und gib nun die Menge aller Lösungen von (IH) an.

Aufgabe 2

Gegeben sei für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 < 4 \cdot b$ die lineare Rekursionsgleichung

$$S_{n+2} = a \cdot S_{n+1} - b \cdot S_n \tag{$*$}$$

(a) Zeige, dass $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ existiert, sodass λ Eigenwert zum Eigenvektor $(\lambda, 1)^\top$ und $\bar{\lambda}$ Eigenwert zum Eigenvektor $(\bar{\lambda}, 1)^\top$ von

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

(b) Folgere, dass

$$\mathrm{Re}(\lambda^n) = \frac{\lambda^n + \bar{\lambda}^n}{2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(\lambda^n) = \frac{\lambda^n - \bar{\lambda}^n}{2i}$$

linear unabhängige reelle Lösungen von $(*)$ sind.

Abgabe: Wer will, kann sich eine Lösung dieses Übungsblatts vom Übungsleiter korrigieren lassen.

[1] Es muss $a_n \in \mathbb{R}$ und $b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.