Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 3
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (4 Punkte, 1 Vortragspunkt für (b))
Beweise mit den in der Vorlesung vorgestellten Peanoaxiomen und der dort definierten Addition die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $k, l, m \in \mathbb{N}$ gilt die Kürzungsregel: $k + l = k + m \Longrightarrow l = m$.

(b) Die Verknüpfung $+$ ist assoziativ, d.h. es gilt für alle $k, l, m \in \mathbb{N}$ die Gleichung $(k + l) + m = k + (l + m)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte, je 1 Vortragspunkt für (a)+(b), (c) und (e))

(a) Zeige, dass auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $(n, m) \sim (k, l) :\Leftrightarrow n + l = k + m$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

(b) Zeichne eine günstig gewählte endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und markiere in deiner Zeichnung, welche Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch $\sim$ äquivalent sind.

(c) Sei nun $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{/\sim}$. Zeige, dass durch die Vorschrift

$$[(m, n)]_\sim + [(k, l)]_\sim = [(m + k, n + l)]_\sim$$

eine Verknüpfung $+$ auf M definiert ist.

(d) Zeige: Zu jedem $k \in M$ gibt es ein Element $-k \in M$, sodass $k + (-k) = [(1, 1)]_\sim$ gilt.

(e) Finde eine injektive Abbildung $\iota \colon \mathbb{N} \to M$, sodass M wie folgt als disjunkte Vereinigung geschrieben werden kann:

$$M = \iota(\mathbb{N}) \cup \{[(1, 1)]_\sim\} \cup \{-k \mid k \in \iota(\mathbb{N})\}$$

(f) Zeige, dass $(M, +)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte, einmalig 1 Vortragspunkt)
Entwerfe eine Aufgabe die eventuell mittels fantasievoller Rahmenhandlung den Leser zur Erkenntnis führt, dass es – im Gegensatz zur Situation bei endlichen Mengen – zwischen gleichmächtigen unendlichen Mengen injektive Abbildungen gibt, die nicht surjektiv sind.
Verfasse außerdem eine Musterlösung zu deiner Aufgabe.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12. November 2014, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.