

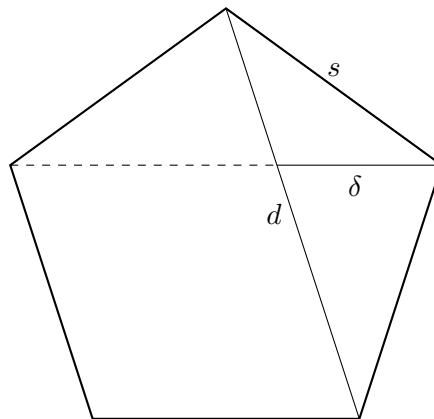
**Übungsblatt 4**  
**Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken**  
**Wintersemester 2014/15**

**Aufgabe 1** (3 Punkte, 1,5 Vortragspunkte)

- (a) Bestimme eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Q}$ .
- (b) Folgere aus (a) und in der Vorlesung Gezeigtem, dass es überabzählbar viele irrationale Zahlen gibt.

**Aufgabe 2** (6 Punkte, je 1,5 Vortragspunkte für (a)+(b)+(c) und (d)+(e))

Wie in der Zeichnung angedeutet, seien  $s \in \mathbb{R}$  die Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks und  $d \in \mathbb{R}$  die Länge einer Diagonalen.



- (a) Zeige, dass die in der Zeichnung mit  $\delta$  bezeichnete Strecke die Länge  $d - s$  hat.
- (b) Zeige, dass  $s$  die Länge einer Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks mit Seitenlänge  $d - s$  ist.
- (c) Folgere, dass  $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$  gilt.
- (d) Zeige: Wenn  $\frac{d}{s} \in \mathbb{Q}$  gilt, dann gibt es eine reelle Zahl  $\lambda > 0$ , sodass  $\lambda \cdot d$  und  $\lambda \cdot s$  natürliche Zahlen sind.
- (e) Zeige, dass  $\frac{d}{s}$  eine irrationale Zahl ist.
- (f) Zeige, dass  $\frac{d}{s}$  eine Nullstelle des Polynoms  $X^2 - X - 1$  ist und bestimme anschließend  $\frac{d}{s}$ .

**Aufgabe 3** (3 Punkte, 1,5 Vortragspunkte)

Bestimme den kleinsten<sup>1</sup> Körper  $K \subseteq \mathbb{R}$ , der die rationalen Zahlen und  $\sqrt{2}$  enthält. Gib dazu eine Basis von  $K$  als  $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum von  $\mathbb{R}$  an.

<sup>1</sup>Ein kleinster Körper ist hier einer, der in jedem Körper mit den geforderten Eigenschaften bereits enthalten ist.

**Aufgabe 4** (4 Punkte, einmalig 1 Vortragspunkt)

Entwerfe eine Aufgabe, die sich möglichst auf alltägliche Sachverhalte bezieht und – evtl. durch ein Beispiel – einen der folgenden Aspekte reeller Zahlen thematisiert:

- In jeder Umgebung einer reellen Zahl liegen unendlich viele rationale Zahlen.
- Jede beschränkte Menge von rationalen Zahlen hat ein reelles Supremum.

Verfasse außerdem eine Musterlösung zu deiner Aufgabe.

**Abgabe:** Bis Mittwoch, den 19. November 2014, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.