Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 9
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (5 Punkte, je 1,5 Vortragspunke für (a)+(b) und (d))
Begründe deine Antworten kurz.

(a) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Ist die Menge der Funktionen $U \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum? Bilden die differenzierbaren Funktionen einen Untervektorraum?

(b) Ist die Menge $\mathbb{Z}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass die Addition ganzer Zahlen die Vektoraddition ist?

(c) $\mathbb{R}^2$ ist durch komponentenweises Multiplizieren ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Sind Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^2$ auch Untervektorräume bezüglich dieser Vektorraumstruktur? Ist ihre Dimension auch 1?

(d) Gib eine stetige Abbildung $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}^2$ an, sodass es für jeden eindimensionalen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ genau ein $t \in (0,1]$ mit $f(t) \in U$ gibt.

(e) Können Folgen reeller Zahlen derart als Vektorraum aufgefasst werden, dass die konvergenten Folgen einen Untervektorraum bilden?

Aufgabe 2 (6 Punkte, je 1,5 Vortragspunkte für (a) und (b)+(c))

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$. Zeige mit elementaren Methoden, dass für die Fläche A des Parallelogramms mit den Eckpunkten $0, x, y, x+y$ gilt:

$$A = |\, det(x, y)|$$

(b) Beschreibe anschaulich, wie das Vorzeichen der Determinante zustande kommt.

(c) Begründe unter Verwendung von (a) anschaulich die folgenden Rechenregeln für Determinanten:

(i) $det(\alpha x, y) = \alpha \cdot det(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $det(x + x', y) = det(x, y) + det(x', y)$ für alle $x, x', y \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (5 Punkte, 1,5 Vortragspunkte für (a)+(b))
Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ sei die Abbildung $L_{x,y} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$L_{x,y}(z) := det(x, y, z)$$

(a) Zeige, dass $L_{x,y}$ eine Linearform ist und folgere, dass ein Vektor $k \in \mathbb{R}^3$ existiert, sodass für alle $z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$L_{x,y}(z) = \langle k, z \rangle$$

– wobei $\langle \_, \_ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.
Bemerkung: k ist das Kreuzprodukt von x und y. Wir schreiben von nun an $x \times y$ statt k.

(b) Gib unter Verwendung der Definition in dieser Aufgabe explizit die Komponenten des Vektors $x \times y$ in Abhängigkeit der Komponenten von x und y an.

(c) Zeige, dass $x \times y$ orthogonal zu x und y ist: $\langle k, x \rangle = 0$ und $\langle k, y \rangle = 0$.

(d) Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt: $x \times y = -y \times x$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7. Januar 2015, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.