Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
PD Dr. Stefan Kühnlein, Prof. Dr. Sebastian Wartha,
Dr. Klaus Spitzmüller, Prof. Dr. Wolfgang Reichel
Dipl.-Math. Felix Wellen

Übungsblatt 9 mit Lösung von Aufgabe 1
Schulmathematik nach dem ersten Studienjahr wiederentdecken
Wintersemester 2014/15

Aufgabe 1 (5 Punkte, je 1,5 Vortragspunke für (a)+(b) und (d))
Begründe deine Antworten kurz.

(a) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Ist die Menge der Funktionen $U \to \mathbb{R}$ mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum? Bilden die differenzierbaren Funktionen einen Untervektorraum?
Lösungsvorschlag (mit Erklärungen): „Punkteweise“ bedeutet, dass etwa die Summe zweier Funktionen $f, g \colon U \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \text{ für } x \in U$$

– dadurch ist eine Funktion $f + g \colon U \to \mathbb{R}$ definiert. Analog wird die Skalarmultiplikation festgelegt:

$$\lambda \cdot f := [x \mapsto \lambda \cdot f(x)]$$

Nun zur Lösung der Aufgabe: Da $\mathbb{R}$ ein Vektorraum ist, gelten die Vektorraumaxiome ebenfalls punktweise – zum Beispiel ist für ein beliebiges $x \in U$, $f, g \colon U \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x),$$

was sich direkt in obige Definition von $f + g$ einsetzen lässt um zu sehen, dass damit auch $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$ gilt. So lassen sich auch alle anderen Vektorraumaxiome übertragen.
Wie man aus Analysis I weiß, sind Linearkombinationen differenzierbarer Funktionen selbst wieder differenzierbar – also bilden diese Funktionen auch einen Untervektorraum.

(b) Ist die Menge $\mathbb{Z}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass die Addition ganzer Zahlen die Vektoraddition ist?
Lösungsvorschlag: Nein. Durch die Vektorraumaxiome sind bereits die folgenden Skalarmultiplikationen festgelegt: $\bar{1} \cdot x = x$ und $\bar{0} \cdot x = 0$. In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt: $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$. Das nutzen wir nun aus. Sei $2 \in \mathbb{Z}$, dann gilt:

$$0 = \bar{0} \cdot 2 = (\bar{1} + \bar{1}) \cdot 2 = \bar{1} \cdot 2 + \bar{2} \cdot 2 = 2 + 2 = 4$$

Wobei beim dritten Gleichheitszeichen ein Vektorraumaxiom angewandt wurde. Da in $\mathbb{Z}$ die Gleichung $0 = 4$ nicht gilt

(c) $\mathbb{R}^2$ ist durch komponentenweises Multiplizieren ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Sind Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^2$ auch Untervektorräume bezüglich dieser Vektorraumstruktur? Ist ihre Dimension auch 1?

Lösungsvorschlag: Wegen $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ sind $\mathbb{R}$-Unterräume auch unter $\mathbb{Q}$-Skalarmultiplikation abgeschlossen. An der Abgeschlossenheit unter Addition ändert sich nichts. Also ist die Antwort auf die erste Frage „Ja". Die Antwort auf die zweite Frage ist „Nein", weil etwa der von $(1,0)^\top$ $\mathbb{R}$-erzeugte Unterraum den Vektor $(\sqrt{2},0)^\top$ enthält – der von $(1,0)^\top$ erzeugte $\mathbb{Q}$-Unterraum jedoch nicht.

(d) Gib eine stetige Abbildung $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}^2$ an, sodass es für jeden eindimensionalen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ genau ein $t \in (0,1]$ mit $f(t) \in U$ gibt.
Lösungsvorschlag: Eine mögliche Abbildung $(0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist

$$t \mapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t))^\top$$

Denn eindimensionale Unvervektorräume in $\mathbb{R}^2$ sind nichts anderes als Ursprungsgeraden und eine solche Gerade hat genau zwei Schnittpunkte mit dem Einheitskreis, von denen jeweils einer im Bild der angegebenen Abbildung liegt.

(e) Können Folgen reeller Zahlen derart als Vektorraum aufgefasst werden, dass die konvergenten Folgen einen Untervektorraum bilden?
Lösungsvorschlag: Ja. Die Vektorraumstruktur kann wie in (a) punktweise definiert werden und Linearkombinationen konvergenter Folgen sind selbst wieder konvergent.

Aufgabe 2 (6 Punkte, je 1,5 Vortragspunkte für (a) und (b)+(c))

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$. Zeige mit elementaren Methoden, dass für die Fläche A des Parallelogramms mit den Eckpunkten $0, x, y, x+y$ gilt:

$$A = |\, det(x,y)|$$

(b) Beschreibe anschaulich, wie das Vorzeichen der Determinante zustande kommt.

(c) Begründe unter Verwendung von (a) anschaulich die folgenden Rechenregeln für Determinanten:

(i) $det(\alpha x, y) = \alpha \cdot det(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $det(x + x', y) = det(x,y) + det(x',y)$ für alle $x, x', y \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (5 Punkte, 1,5 Vortragspunkte für (a)+(b))
Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ sei die Abbildung $L_{x,y}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$L_{x,y}(z) := det(x, y, z)$$

(a) Zeige, dass $L_{x,y}$ eine Linearform ist und folgere, dass ein Vektor $k \in \mathbb{R}^3$ existiert, sodass für alle $z \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$L_{x,y}(z) = \langle k, z \rangle$$

– wobei $\langle \_, \_ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.
Bemerkung: k ist das Kreuzprodukt von x und y. Wir schreiben von nun an $x \times y$ statt k.

(b) Gib unter Verwendung der Definition in dieser Aufgabe explizit die Komponenten des Vektors $x \times y$ in Abhängigkeit der Komponenten von x und y an.

(c) Zeige, dass $x \times y$ orthogonal zu x und y ist: $\langle k, x \rangle = 0$ und $\langle k, y \rangle = 0$.

(d) Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt: $x \times y = -y \times x$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7. Januar 2015, zu Beginn der Übung an den Übungsleiter.