Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

16.04.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“

SS 2007

Einführungsvortrag: Trigonometrische Polynome und Fourier–Reihen

Markus Richter

Definition. Eine 2π-periodische Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von der Form

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \Big),$$

wobei $a_0, \dots, a_N$ und $b_1, \dots, b_N$ komplexe Zahlen mit $a_N \neq 0$ oder $b_N \neq 0$ sind, heißt *trigonometrisches Polynom* vom Grad N.

Bemerkung. Wichtige Formeln im Zusammenhang mit trigonometrischen Polynomen sind die Identitäten

$$\begin{aligned} 2\cos(x)\cos(y) &= \cos(x-y) + \cos(x+y), \\ 2\sin(x)\sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y), \\ 2\cos(x)\sin(y) &= \sin(x-y) + \sin(x+y) \end{aligned}$$

und die Eulersche Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x).$$

Lemma. *Für jedes trigonometrische Polynom p vom Grad N existiert eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form*

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},$$

wobei die komplexen Koeffizienten $c_{-N}, \dots, c_N$ durch

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n)$$

für $n = 1, \dots, N$ gegeben sind.

Lemma. *Sei p ein trigonometrisches Polynom vom Grad N. Dann gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\, dt = 2\pi c_n$$

für $n = -N, \ldots, N$, wobei c_n der n-te komplexe Koeffizient von p ist.

Definition. Eine Reihe, deren Partialsummen trigonometrische Polynome sind, heißt *Fourier–Reihe*. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische, integrierbare Funktion, so definiert man formal die *Fourier–Reihe der Funktion* f

$$\breve{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\, dt \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei heißt c_n der *n-te Fourier–Koeffizient von f*.

Bemerkung. Für jedes trigonometrische Polynom p gilt $\breve{p} = p$.

Satz (Riemann–Lebesgue Lemma)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(t)\, \sin(nt)\, dt = 0.$$

Lemma. *Seien c_n, $n \in \mathbb{Z}$, die Fourier–Koeffizienten einer 2π–periodischen, integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. *Die Folge der Fourier–Koeffizienten ist beschränkt. Es gilt*

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

2. $c_n \to 0$ *für* $|n| \to \infty$.