



Proseminar „Fourier-Reihen“ SS 2007

Einführungsvortrag: Trigonometrische Polynome und Fourier-Reihen Markus Richter

Definition. Eine 2π -periodische Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von der Form

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

wobei a_0, \dots, a_N und b_1, \dots, b_N komplexe Zahlen mit $a_N \neq 0$ oder $b_N \neq 0$ sind, heißt *trigonometrisches Polynom* vom Grad N .

Bemerkung. Wichtige Formeln im Zusammenhang mit trigonometrischen Polynomen sind die Identitäten

$$\begin{aligned} 2 \cos(x) \cos(y) &= \cos(x-y) + \cos(x+y), \\ 2 \sin(x) \sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y), \\ 2 \cos(x) \sin(y) &= \sin(x-y) + \sin(x+y) \end{aligned}$$

und die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Lemma. Für jedes trigonometrische Polynom p vom Grad N existiert eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$p(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int},$$

wobei die komplexen Koeffizienten c_{-N}, \dots, c_N durch

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

für $n = 1, \dots, N$ gegeben sind.

Lemma. Sei p ein trigonometrisches Polynom vom Grad N . Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{-int} dt = 2\pi c_n$$

für $n = -N, \dots, N$, wobei c_n der n -te komplexe Koeffizient von p ist.

Definition. Eine Reihe, deren Partialsummen trigonometrische Polynome sind, heißt *Fourier-Reihe*. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische, integrierbare Funktion, so definiert man formal die *Fourier-Reihe der Funktion* f

$$\check{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

durch

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei heißt c_n der n -te *Fourier-Koeffizient* von f .

Bemerkung. Für jedes trigonometrische Polynom p gilt $\check{p} = p$.

Satz (Riemann–Lebesgue Lemma). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Lemma. Seien $c_n, n \in \mathbb{Z}$, die Fourier-Koeffizienten einer 2π -periodischen, integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt

1. Die Folge der Fourier-Koeffizienten ist beschränkt. Es gilt

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. $c_n \rightarrow 0$ für $|n| \rightarrow \infty$.