Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

23.04.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“
SS 2007

Vortrag 1: Césaro–Summation und positive Summationskerne
Viktoriya Burlak

Definition. Sei a_k eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Man definiert die partiellen Summen s_n und das arithmetischen Mittel der ersten n der Partialsummen σ_n folgendermaßen:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$$

Man sagt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *Césaro–summierbar* zum Wert s ist, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

Schreibweise:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \qquad (C, 1)$$

Lemma. *Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegen s konvergent ist, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

Beispiel. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

Für die Partialsummen gilt $s_n = 0$, wenn n gerade ist, und $s_n = 1$, wenn n ungerade ist. Die Reihe ist also divergent. Für σ_n hingegen gilt:

$$\sigma_n = \frac{1}{2} \qquad \text{wenn } n \text{ gerade ist,}$$

$$\sigma_n = \frac{\frac{1}{2}(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n} \qquad \text{wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

Daraus folgt $\sigma_n \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$. Die Reihe ist also Césaro–summierbar zum Wert $\frac{1}{2}$.

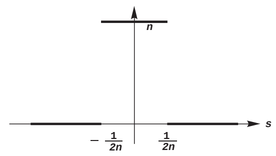

Abbildung 1: Beispiel für einen positiven Summationskern.

Definition. Sei $I = (-a, a)$ ein endliches oder unendliches Intervall. Sei $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellen, Riemann-integrierbaren Funktionen, die folgende Eigenschaften besitzen:

1. $K_n(s) \geq 0.$
2. $\displaystyle\int_{-a}^{a} K_n(s)\, ds = 1.$
3. Für alle $\delta > 0$ gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|s|<a} K_n(s)\, ds = 0.$

Dann heißt die Folge $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein *positiver Summationskern*.

Beispiel. Die Funktionen $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$K_n(s) = \begin{cases} n & \text{falls } |s| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{falls } |s| > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

bilden einen positiven Summationskern (siehe Abbildung 1).

Satz. *Sei $I = (-a, a)$ ein endliches oder unendliches Intervall und $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein positiver Summationskern. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine integrierbare, beschränkte Funktion, die an der Stelle $s = 0$ stetig ist. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} K_n(s) f(s) ds = f(0).$$

Literatur

[1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.