Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

30.04.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“

SS 2007

Vortrag 2: Dirichlet– und Fejér–Kerne, Existenz und Eindeutigkeit der Fourier–Reihe

Markus Richter

Definition. Die Funktionenfolge $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$, definiert durch

$$D_N(u) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{2\pi\sin(\frac{1}{2}u)}, \qquad N \in \mathbb{N}_0,$$

heißt *Dirichlet–Kern*.

Lemma. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π–periodische, integrierbare Funktion, und sei*

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \qquad N \in \mathbb{N}_0$$

die N–te Partialsumme ihrer Fourier–Reihe. Dann gilt

$$s_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) f(t-u)\, du, \qquad N \in \mathbb{N}_0.$$

Definition. Die Funktionenfolge $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$, definiert durch

$$F_N(u) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)u)}{\sin(\frac{1}{2}u)}\right)^2, \qquad N \in \mathbb{N}_0,$$

heißt *Fejér–Kern*.

Lemma. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π–periodische, integrierbare Funktion, und sei*

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} s_n(t), \qquad N \in \mathbb{N}_0$$

das arithmetische Mittel der ersten $(N+1)$ Partialsummen ihrer Fourier–Reihe. Dann gilt

$$\sigma_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(t-u)\, du, \qquad N \in \mathbb{N}_0.$$

Lemma. *Die Funktionenfolge $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$ ist ein positiver Summationskern.*

Satz (Fejér)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, 2π-periodische Funktion, die an einer Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist. Dann ist die Fourier–Reihe*

$$\breve{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

von f an dieser Stelle Césaro–summierbar, und es gilt

$$\breve{f}(t_0) = f(t_0) \qquad (C, 1).$$

Korollar. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, 2π-periodische Funktion derart, dass ihre Fourier–Reihe $\breve{f}(t)$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$ konvergiert. Dann gilt $\breve{f} = f$.*

Literatur

[1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.