



Proseminar „Fourier-Reihen“ SS 2007

Vortrag 2: Dirichlet- und Fejér-Kerne, Existenz und Eindeutigkeit der Fourier-Reihe

Markus Richter

Definition. Die Funktionenfolge $\{D_N\}_{N=0}^\infty$, definiert durch

$$D_N(u) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})u)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}u)}, \quad N \in \mathbb{N}_0,$$

heißt *Dirichlet-Kern*.

Lemma. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische, integrierbare Funktion, und sei

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}, \quad N \in \mathbb{N}_0$$

die N -te Partialsumme ihrer Fourier-Reihe. Dann gilt

$$s_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) f(t-u) du, \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

Definition. Die Funktionenfolge $\{F_N\}_{N=0}^\infty$, definiert durch

$$F_N(u) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)u)}{\sin(\frac{1}{2}u)} \right)^2, \quad N \in \mathbb{N}_0,$$

heißt *Fejér-Kern*.

Lemma. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische, integrierbare Funktion, und sei

$$\sigma_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N s_n(t), \quad N \in \mathbb{N}_0$$

das arithmetische Mittel der ersten $(N+1)$ Partialsummen ihrer Fourier-Reihe. Dann gilt

$$\sigma_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) f(t-u) du, \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

Lemma. Die Funktionenfolge $\{F_N\}_{N=0}^\infty$ ist ein positiver Summationskern.

Satz (Fejér). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, 2π -periodische Funktion, die an einer Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist. Dann ist die Fourier-Reihe

$$\check{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

von f an dieser Stelle Césaro-summierbar, und es gilt

$$\check{f}(t_0) = f(t_0) \quad (C, 1).$$

Korollar. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige, 2π -periodische Funktion derart, dass ihre Fourier-Reihe $\check{f}(t)$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$ konvergiert. Dann gilt $\check{f} = f$.

Literatur

- [1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.