



Proseminar „Fourier–Reihen“ SS 2007

Vortrag 3: Regularität und Abklingverhalten, Punktweise Konvergenz der Fourier–Reihe

Thomas Reich

Definition. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π –periodische, integrierbare Funktion. Dann bezeichnet

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

den n –ten Fourier–Koeffizienten ihrer Fourier–Reihe.

Bemerkung. Im folgenden wird die Schreibweise $f \in C^k(\mathbf{T})$ verwendet, wenn f eine 2π –periodische und k –mal stetig differenzierbare Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{C} ist. Dabei bezeichnet \mathbf{T} die Faktormenge $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Diese entspricht dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit einer Identifikation der Endpunkte.

Lemma. Sei $f \in C^k(\mathbf{T})$. Dann gilt

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

Satz. Sei $f \in C^k(\mathbf{T})$. Dann existiert eine Konstante $M > 0$, sodass

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn an jeder Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert $f(t_0-)$ und $f(t_0+)$ existieren. Dabei ist

$$f(t_0-) = \lim_{t \nearrow t_0} f(t), \quad f(t_0+) = \lim_{t \searrow t_0} f(t).$$

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise differenzierbar*, wenn an jeder Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung $f'_L(t_0)$ und $f'_R(t_0)$ existieren. Dabei ist

$$f'_L(t_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0-)}{h}, \quad f'_R(t_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0+)}{h}.$$

Lemma. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische, stückweise stetige und stückweise differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t_0 - u) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})u)}{\sin \frac{1}{2}u} du = f(t_0-),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_\pi^0 f(t_0 - u) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})u)}{\sin \frac{1}{2}u} du = f(t_0+).$$

Satz. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine 2π -periodische, stückweise stetige und stückweise differenzierbare Funktion. Sei \check{f} ihre Fourier-Reihe, dann gilt

$$\check{f}(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-)).$$

Literatur

- [1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.