Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

07.05.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“
SS 2007

Vortrag 3: Regularität und Abklingverhalten, Punktweise Konvergenz der Fourier–Reihe

Thomas Reich

Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π–periodische, integrierbare Funktion. Dann bezeichnet

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\, dt$$

den n–ten Fourier–Koeffizienten ihrer Fourier–Reihe.

Bemerkung. Im folgenden wird die Schreibweise $f \in C^k(\mathbf{T})$ verwendet, wenn f eine 2π–periodische und k-mal stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ist. Dabei bezeichnet $\mathbf{T}$ die Faktormenge $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Diese entspricht dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit einer Identifikation der Endpunkte.

Lemma. *Sei $f \in C^k(\mathbf{T})$. Dann gilt*

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

Satz. *Sei $f \in C^k(\mathbf{T})$. Dann existiert eine Konstante $M > 0$, sodass*

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn an jeder Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert $f(t_0-)$ und $f(t_0+)$ existieren. Dabei ist

$$f(t_0-) = \lim_{t \nearrow t_0} f(t), \qquad f(t_0+) = \lim_{t \searrow t_0} f(t).$$

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise differenzierbar*, wenn an jeder Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung $f'_L(t_0)$ und $f'_R(t_0)$ existieren. Dabei ist

$$f'_L(t_0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0-)}{h}, \qquad f'_R(t_0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0+)}{h}.$$

Lemma. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π–periodische, stückweise stetige und stückweise differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t_0 - u) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{\sin \frac{1}{2}u}\, du = f(t_0-),$$
$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(t_0 - u) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})u)}{\sin \frac{1}{2}u}\, du = f(t_0+).$$

Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π–periodische, stückweise stetige und stückweise differenzierbare Funktion. Sei $\breve{f}$ ihre Fourier–Reihe, dann gilt*

$$\breve{f}(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-)).$$

Literatur

[1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.