Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

14.05.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“
SS 2007

Vortrag 4: Das Gibbs–Phänomen, Divergente Fourier–Reihen

Markus Schreiber

Satz. *Sei $a < b$ und*

$$H(t) = \begin{cases} a & -\pi < t < 0 \\ b & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Dann tritt das Maximum bzw. das Minimum der n-ten Partialsumme s_n der Fourierreihe von H an der Stelle $\frac{\pi}{2n}$ bzw. $-\frac{\pi}{2n}$ auf. An diesen Stellen bilden sich Über- bzw. Unterschwinger mit

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\tfrac{\pi}{2n}) = s(0+) + \big(s(0+) - s(0-)\big)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right) \approx b + 0,089(b-a)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} s_n(-\tfrac{\pi}{2n}) = s(0-) - \big(s(0+) - s(0-)\big)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right) \approx a - 0,089(b-a).$$

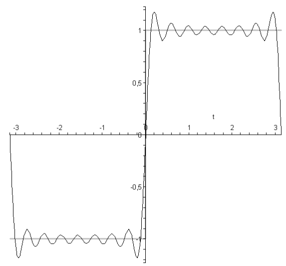

Abbildung 1: Auftreten des Gibbs-Phänomens

Definition. Sei X ein Vektorraum, und sei $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung, sodass für alle $x, y \in X$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dann heißt $\|\cdot\|$ eine *Norm* auf X, und das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt ein *normierter Raum*. Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$, in dem alle Cauchy-Folgen in X konvergieren, heißt ein *Banach–Raum*

Definition. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte Räume, und sei $A : X \to Y$ eine Abbildung, sodass für alle $x, y \in X$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

1. $A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y)$
2. $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ für ein festes $C > 0$

Dann heißt A ein *beschränkter, linearer Operator* von X nach Y. Für jeden beschränkten, linearen Operator A definiert man die sogenannte *Operatornorm* $\|A\|$ durch

$$\|A\| := \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Satz (Banach–Steinhaus)**.** *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach–Räume, und sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter, linearer Operatoren von X nach Y, sodass*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n f\| < \infty \qquad \text{für alle } f \in X.$$

Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Satz. *Es existiert eine stetige Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, deren Fourier–Reihe an der Stelle $t = 0$ divergiert.*

Literatur

[1] G. Bachman, L. Narici, and E. Beckenstein. *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer, New York, 2000.