



Proseminar „Fourier–Reihen“ SS 2007

Vortrag 5: L^2 –Theorie I Michael Gölzer

Definition. Sei V ein \mathbb{C} –Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *inneres Produkt*, falls für alle $u, v, w \in V$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgendes gilt:

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
2. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$
3. $\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

Das Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt dann ein *Innenproduktraum*. In jedem Innenproduktraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ definiert man durch

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad \text{für alle } u \in V$$

eine Norm. Ein Innenproduktraum, in dem alle Cauchy–Folgen bezüglich der obigen Norm in V konvergieren, heißt *Hilbert–Raum*.

Definition. Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall. Dann heißt die Menge

$$L^2([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist Lebesgue-messbar, } \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

versehen mit der Äquivalenzrelation

$$g = f \text{ in } L^2([a, b]) \iff \exists \text{ Lebesgue–Nullmenge } N : g(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus N$$

der *Lebesgue–Raum* der quadratintegriblen Funktionen über $[a, b]$. Versehen mit dem Innenprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad \text{für alle } f, g \in L^2([a, b])$$

ist dieser Raum ein Hilbert–Raum.

Definition. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen *orthogonal*, falls

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ eine endliche Teilmenge von V , sodass

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, N\}$$

gilt. Dann heißt $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ *orthonormales System*.

Definition. Ist $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ orthonormales System in V , $u \in V$, dann heißt

$$P_N(u) := \sum_{k=1}^N \langle u, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

orthogonale Projektion von u auf den Unterraum $U = \text{span} \{\varphi_k\}_{k=1}^N$.

Satz. Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ orthonormales System in V . Sei $u \in V$, und sei

$$\phi := \sum_{k=1}^N \gamma_k \varphi_k \quad \text{mit } \gamma_k \in \mathbb{C} \text{ für } k = 1, \dots, N.$$

Dann gilt: $\|u - \phi\|$ ist minimal für $\gamma_k = \langle u, \varphi_k \rangle$, also für $\phi = P_N(u)$.

Korollar (Bessel–Ungleichung). Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ ein orthonormales System in V bestehend aus unendlich vielen Vektoren. Dann gilt für alle $u \in V$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

Satz. Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ Orthonormalbasis von U , $u, v \in U$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^N \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j, \\ \|u\|^2 &= \sum_{j=1}^N |\langle u, \varphi_j \rangle|^2, \\ \langle u, v \rangle &= \sum_{j=1}^N \langle u, \varphi_j \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle}. \end{aligned}$$