Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

21.05.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“
SS 2007

Vortrag 5: L^2–Theorie I
Michael Gölzer

Definition. Sei V ein $\mathbb{C}$–Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *inneres Produkt*, falls für alle $u, v, w \in V$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgendes gilt:

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
2. $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$
3. $\langle u, u\rangle \geq 0, \quad \langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$

Das Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt dann ein *Innenproduktraum*. In jedem Innenproduktraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definiert man durch

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \qquad \text{für alle } u \in V$$

eine Norm. Ein Innenproduktraum, in dem alle Cauchy–Folgen bezüglich der obigen Norm in V konvergieren, heißt *Hilbert–Raum*.

Definition. Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall. Dann heißt die Menge

$$L^2([a,b]) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ ist Lebesgue-messbar, } \int_a^b |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\},$$

versehen mit der Äquivalenzrelation

$$g = f \quad \text{in } L^2([a,b]) \;:\iff\; \exists \text{ Lebesgue–Nullmenge } N : \quad g(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b] \setminus N$$

der *Lebesgue–Raum* der quadratintegrablen Funktionen über $[a, b]$. Versehen mit dem Innenprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)} \, dt \qquad \text{für alle } f, g \in L^2([a,b])$$

ist dieser Raum ein Hilbert–Raum.

Definition. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Innenproduktraum. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen *orthogonal*, falls

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ eine endliche Teilmenge von V, sodass

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } i, j \in \{1, \ldots, N\}$$

gilt. Dann heißt $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ *orthonormales System*.

Definition. Ist $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ orthonormales System in $V, u \in V,$ dann heißt

$$P_N(u) := \sum_{k=1}^N \langle u, \varphi_k\rangle \varphi_k$$

orthogonale Projektion von u auf den Unterraum $U = \operatorname{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^N$.

Satz. *Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ orthonormales System in V Sei $u \in V$, und sei*

$$\phi := \sum_{k=1}^N \gamma_k \varphi_k \qquad \text{mit } \gamma_k \in \mathbb{C} \text{ für } k = 1, \ldots, N.$$

Dann gilt: $\|u - \phi\|$ ist minimal für $\gamma_k = \langle u, \varphi_k\rangle$, also für $\phi = P_N(u)$.

Korollar (Bessel–Ungleichung)**.** *Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ ein orthonormales System in V bestehend aus unendlich vielen Vektoren. Dann gilt für alle $u \in V$*

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle u, \varphi_k\rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

Satz. *Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ Orthonormalbasis von U, $u, v \in U$. Dann gilt:*

$$u = \sum_{j=1}^N \langle u, \varphi_j\rangle \varphi_j,$$

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^N |\langle u, \varphi_j\rangle|^2,$$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^N \langle u, \varphi_j\rangle \overline{\langle v, \varphi_j\rangle}.$$