



Proseminar „Fourier–Reihen“ SS 2007

Vortrag 6: L^2 –Theorie II Tobias Rienmüller

Definition. Ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ in einem Hilbert–Raum V heißt *vollständig*, wenn es zu jedem $u \in V$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination $\sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j$ gibt, so dass folgendes gilt:

$$\left\| u - \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j \right\| < \varepsilon$$

Satz. Ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ in V ist genau dann vollständig, wenn für alle $u \in V$ die Parseval–Gleichung gilt, d.h. wenn

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_j \rangle|^2 \quad \text{für alle } u \in V.$$

Satz. Sei $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in V . Dann gilt

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad \text{für alle } u \in V,$$

wobei die Partialsummen bezüglich der Norm in V konvergieren, d.h.

$$\left\| u - \sum_{j=1}^N \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\| \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Satz. Sei $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in V . Dann gilt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle} \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Satz. Das Orthogonalsystem $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist vollständig in $L^2([-\pi, \pi])$.

Korollar. Jede Funktion $f \in L^2([-\pi, \pi])$ wird durch ihre Fourier-Reihe dargestellt, d.h. es gilt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int} \quad \text{in } L^2([-\pi, \pi]).$$

Ferner gilt für jede Funktion $u \in L^2([-\pi, \pi])$ die Parseval-Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$

Hierbei bezeichnet $c_n(f)$ den n -ten Fourier-Koeffizienten der Funktion f , $n \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 1. Wir betrachten die ungerade Funktion: $f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$, $0 < t < \pi$ mit der Periode 2π . Diese kann wie folgt als Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \text{mit} \quad c_n = -\frac{\operatorname{sgn}(n)i}{2n}, \quad c_0 = 0.$$

Aus der Parseval-Gleichung ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{4} (\pi - t)^2 dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Literatur

- [1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.