Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

04.06.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“
SS 2007

Vortrag 6: L^2–Theorie II
Tobias Rienmüller

Definition. Ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ in einem Hilbert–Raum V heißt *vollständig*, wenn es zu jedem $u \in V$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j$ gibt, so dass folgendes gilt:

$$\Big\| u - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j \Big\| < \varepsilon$$

Satz. *Ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ in V ist genau dann vollständig, wenn für alle $u \in V$ die* Parseval–Gleichung *gilt, d.h. wenn*

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_j \rangle|^2 \qquad \text{für alle } u \in V.$$

Satz. *Sei $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in V. Dann gilt*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j \qquad \text{für alle } u \in V,$$

wobei die Partialsummen bezügliche der Norm in V konvergieren, d.h.

$$\|u - \sum_{j=1}^{N} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j\| \to 0 \qquad \text{für } N \to \infty.$$

Satz. *Sei $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in V. Dann gilt*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \overline{\langle v, \varphi_j \rangle} \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

Satz. *Das Orthogonalsystem $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ist vollständig in $L^2([-\pi, \pi])$.*

Korollar. *Jede Funktion $f \in L^2([-\pi, \pi])$ wird durch ihre Fourier–Reihe dargestellt, d.h. es gilt*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \qquad \text{in } L^2([-\pi, \pi]).$$

Ferner gilt für jede Funktion $u \in L^2([-\pi, \pi])$ die Parseval–Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$

Hierbei bezeichnet $c_n(f)$ den n–ten Fourier–Koeffizienten der Funktion f, $n \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 1. Wir betrachten die ungerade Funktion: $f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$, $0 < t < \pi$ mit der Periode 2π. Diese kann wie folgt als Fourier–Reihe dargestellt werden:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad \text{mit} \quad c_n = -\frac{\operatorname{sgn}(n)\mathrm{i}}{2n}, \; c_0 = 0.$$

Aus der Parseval–Gleichung ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{4} (\pi - t)^2 \, dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Literatur

[1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.