Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

18.06.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“
SS 2007

Vortrag 7: Die Fourier–Transformation
Michael Manz

Definition. Die Menge

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty \right\}$$

heißt der *Lebesgue–Raum* der absolut integrierbaren Funktionen.

Definition. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine absolut integrierbare Funktion, so heißt die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt,$$

die *Fourier–Transformierte* oder das *Fourier–Integral* von f. Statt $\widehat{f}$ schreibt man auch F oder $\mathcal{F}[f]$.

Satz. *Für die Fourier–Transformierte $\widehat{f}$ einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt:*

1. *$\widehat{f}$ ist beschränkt, genauer* $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ *für alle* $\omega \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{\omega \to \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$
3. *$\widehat{f}$ ist stetig.*

Satz. *Die Abbildung $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ ist ein linearer, beschränkter Operator vom Raum $L^1(\mathbb{R})$ in den Raum der stetigen Funktionen, die für $t \to \pm\infty$ gegen 0 streben.*

Satz (Verschiebungssatz)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion*

$$f_a(t) := f(t-a)$$

Es gilt

$$\widehat{f}_a(\omega) = e^{-ia\omega}\widehat{f}(\omega)$$

sowie

$$\mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) = \widehat{f}(\omega - a).$$

Satz (Differentiationssatz)**.** *Sei f differenzierbar, und seien $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt:*

$$\widehat{f'}(\omega) = \mathrm{i}\omega\widehat{f}(\omega).$$

Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$ und sei außerdem $t \mapsto tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist $\widehat{f}$ differenzierbar, und es gilt

$$\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = \mathrm{i}\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega).$$

Literatur

[1] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Number 223 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2003.