Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

25.06.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“
SS 2007

Vortrag 8: Trigonometrische Interpolation und FFT
Annette Melioumis

Trigonometrische Interpolation Bei einer *trigonometischen Interpolation* wird zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein trigonometisches Polynom

$$\phi_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

bestimmt, welches f in den N äquidistanten Stützstellen $t_m = 2\pi m/N$, $m = 0, \dots, N-1$, interpoliert, d.h. für das

$$\phi_N(t_m) = f(t_m) \qquad \text{für alle } m = 0, \dots, N-1$$

gilt. Ein solches trigonometrisches Polynom ϕ_N wird eine *trigonometrische Interpolierende* von f genannt.

Lemma. *Für die N-ten komplexen Einheitswurzeln $\omega_k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi k/N}$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^m \omega_k^{-l} = N\delta_{ml}$$

Insbesondere sind die Funktionen $\psi_k(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ orthonormal bezüglich des Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$, definiert durch

$$\langle f, g\rangle_N := \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(t_m)\overline{g(t_m)}.$$

Satz. *Die Koeffizienten c_k der trigonometrischen Interpolierenden ϕ_N von f zu den N Stützpunkten $(t_m, f(t_m))$, mit äquidistanten Knoten $t_m = 2\pi m/N$, sind gegeben durch*

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f(t_m)\omega_m^{-k} \qquad \textit{für } k = 0, ..., N-1.$$

Bemerkung. Die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N, \quad (f_0, \ldots, f_{N-1}) \mapsto (c_0, \ldots, c_{N-1}),$$

definiert durch

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi km/N} \qquad \text{für } k = 0, ..., N-1,$$

heißt *diskrete Fourier–Transformation*. Ihre Umkehrabbildung $\mathcal{F}_N^{-1}$ ist gegeben durch

$$f_k = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi km/N} \qquad \text{für } k = 0, \ldots, N-1.$$

Lemma. *Sei $N = 2M$ gerade und $\omega = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}2\pi/N}$. Dann lassen sich die trigonometrischen Summen*

$$c_k = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \omega^{mk} \qquad \textit{für } k = 0, \ldots, N-1$$

wie folgt berechnen, wobei $\xi := \omega^2$ und $l = 0, \ldots, M-1$:

$$c_{2l} = \sum_{m=0}^{M-1} g_m \xi^{ml} \qquad \textit{mit } \; g_m = f_m + f_{m+M},$$

$$c_{2l+1} = \sum_{m=0}^{M-1} h_m \xi^{ml} \qquad \textit{mit } \; h_m = (f_m - f_{m+M})\omega^m,$$

d.h. die Berechnung der c_k kann zurückgeführt werden auf zwei gleichartige Probleme der halben Dimension $M = N/2$.

Literatur

[1] T. Butz. *Fouriertransformation für Fußgänger (4. Auflage)*. B.G. Teubner, Wiesbaden, 2005.

[2] P. Deuflhard and A. Hohmann. *Numerische Mathematik I (3. Auflage)*. de Gruyter, Berlin New York, 2002.