



Proseminar „Fourier-Reihen“ SS 2007

Vortrag 8: Trigonometrische Interpolation und FFT Annette Melioumis

Trigonometrische Interpolation Bei einer *trigonometrischen Interpolation* wird zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein trigonometrisches Polynom

$$\phi_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikt}$$

bestimmt, welches f in den N äquidistanten Stützstellen $t_m = 2\pi m/N$, $m = 0, \dots, N-1$, interpoliert, d.h. für das

$$\phi_N(t_m) = f(t_m) \quad \text{für alle } m = 0, \dots, N-1$$

gilt. Ein solches trigonometrisches Polynom ϕ_N wird eine *trigonometrische Interpolierende* von f genannt.

Lemma. Für die N -ten komplexen Einheitswurzeln $\omega_k := e^{i2\pi k/N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^m \omega_k^{-l} = N \delta_{ml}$$

Insbesondere sind die Funktionen $\psi_k(t) := e^{ikt}$ orthonormal bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$, definiert durch

$$\langle f, g \rangle_N := \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(t_m) \overline{g(t_m)}.$$

Satz. Die Koeffizienten c_k der trigonometrischen Interpolierenden ϕ_N von f zu den N Stützpunkten $(t_m, f(t_m))$, mit äquidistanten Knoten $t_m = 2\pi m/N$, sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(t_m) \omega_m^{-k} \quad \text{für } k = 0, \dots, N-1.$$

Bemerkung. Die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad (f_0, \dots, f_{N-1}) \mapsto (c_0, \dots, c_{N-1}),$$

definiert durch

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-i2\pi km/N} \quad \text{für } k = 0, \dots, N-1,$$

heißt *diskrete Fourier-Transformation*. Ihre Umkehrabbildung \mathcal{F}_N^{-1} ist gegeben durch

$$f_k = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{i2\pi km/N} \quad \text{für } k = 0, \dots, N-1.$$

Lemma. Sei $N = 2M$ gerade und $\omega = e^{\pm i2\pi/N}$. Dann lassen sich die trigonometrischen Summen

$$c_k = \sum_{m=0}^{N-1} f_m \omega^{mk} \quad \text{für } k = 0, \dots, N-1$$

wie folgt berechnen, wobei $\xi := \omega^2$ und $l = 0, \dots, M-1$:

$$c_{2l} = \sum_{m=0}^{M-1} g_m \xi^{ml} \quad \text{mit } g_m = f_m + f_{m+M},$$

$$c_{2l+1} = \sum_{m=0}^{M-1} h_m \xi^{ml} \quad \text{mit } h_m = (f_m - f_{m+M}) \omega^m,$$

d.h. die Berechnung der c_k kann zurückgeführt werden auf zwei gleichartige Probleme der halben Dimension $M = N/2$.

Literatur

- [1] T. Butz. *Fouriertransformation für Fußgänger (4. Auflage)*. B.G. Teubner, Wiesbaden, 2005.
- [2] P. Deuffhard and A. Hohmann. *Numerische Mathematik I (3. Auflage)*. de Gruyter, Berlin New York, 2002.