Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Prof. Dr. W. Dörfler
Dipl.–Math. techn. M Richter

02.07.2007

Proseminar „Fourier–Reihen“

SS 2007

Vortrag 9: Die Kosinus–Transformation und das JPEG Dateiformat

Oleksandr Bondarenko

Lemma. *Sei $f \in L^2([-\pi,\pi])$ eine gerade Funktion. Dann besitzt sie die Fourier–Reihe*

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta.$$

Definition. Sei $f \in L^2([0,\pi])$, und sei $\hat{f}(\theta) \in L^2([0,2\pi])$ die spiegelsymmetrische Fortsetzung von f, definiert durch

$$\hat{f}(\theta) = \begin{cases} f(t) & \text{falls } 0 \le t \le \pi, \\ f(2\pi - t) & \text{falls } \pi \le t \le 2\pi \end{cases}.$$

Dann heißt die Fourier–Reihe von $\hat{f}$ die *Kosinus–Reihe* von f.

Beispiel. Gegeben sei die Funktion $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x$. Ihre Fourier–Reihe bei punktsymmetrischer Fortsetzung auf $[-\pi,\pi]$ lautet

$$\breve{f}(x) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Ihre Kosinus–Reihe bei spiegelsymmetrischer Fortsetzung auf $[0,2\pi]$ lautet.

$$\hat{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Offenbar fallen die Reihenglieder der Kosinus–Reihe wie k^{-2}, die der Fourier–Reihe nur wie k^{-1} ab, da die punktsymmetrische Fortsetzung von f Sprungstellen besitzt.

Bemerkung. Die diskrete Fourier–Transformation (DFT) bildet einen Vektor $(f_0, \ldots, f_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ auf einen zweiten Vektor $(F_0, \ldots, F_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ gemäß

$$F_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_N^{-kj} \qquad\qquad \omega_N^{kj} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}}$$

ab. Für einen Vektor mit $N = 2n$ Komponenten und $f_{2n-k} = f_k$ für $k = 0, \ldots, N-1$ erhält man

$$F_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(\frac{2\pi}{N} j) + \frac{1}{2N}(f_N e^{i\pi j} - f_0).$$

Definition. Die lineare Abbildung

$$\mathcal{C}_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad (f_0, \ldots, f_{N-1}) \mapsto (F_0, \ldots, F_{N-1}),$$

definiert durch

$$F_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(\frac{2\pi}{N} j) \qquad \text{für } k = 0, ..., N-1,$$

heißt *diskrete Cosinus–Transformation* (DCT-II).

Bemerkung. Die diskrete Kosinus–Transformation wird beim Dateiformat JPEG zur Datenkompression vewendet. Ein digitales Bild wird zunächst in Blöcke von jeweils 8×8 Pixel aufgeteilt. Jeder Block wird mittels DCT-II transformiert. Nach der Transformation befinden sich die wichtigen, niederfrequenten Anteile des Bildes in der linken, oberen Ecke eines Block. Die übrigen Daten können vernachlässigt werden.

Literatur

[1] T. Butz. *Fouriertransformation für Fußgänger (4. Auflage)*. B.G. Teubner, Wiesbaden, 2005.

[2] M. Hanke-Bourgeois. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. B.G. Teubner, Wiesbaden, 2002.