1 ggT-Beispiel - korrigiert

Hier ist die Rechnung mit Maxima (mit : kann man zuweisen, mit %o20[2] extrahiert man das zweite Element der Liste aus der Ausgabe %o20):

```
(%i18) p:3*x^2+2*x;
                                          2
(%o18)                                 3 x  + 2 x
(%i19) q:-3*x^2+3*x+2;
                                          2
(%o19)                              - 3 x  + 3 x + 2
(%i20) divide(p,q);
(%o20)                               [- 1, 5 x + 2]
(%i21) r:%o20[2];
(%o21)                                  5 x + 2
(%i22) divide(q,r);
                                    15 x - 21  8
(%o22)                           [- ---------, --]
                                       25      25

(%i23) d:%o22[2];
                                           8
(%o23)                                     --
                                           25
```

Also haben wir

$$
\begin{aligned}
p &= q\,(-1) + r \Leftrightarrow r = p + q && (1)\\
q &= r\,(\frac{-3x}{5} + \frac{21}{25}) + d && (2)
\end{aligned}
$$

und somit

$$d = q - r\,(\frac{-3x}{5} + \frac{21}{25}) = q - (p+q)\,(\frac{-3x}{5} + \frac{21}{25}) = (\frac{3x}{5} - \frac{21}{25})p + (\frac{3x}{5} + \frac{4}{25})q$$

Probe in Maxima:

```
(%i24) (3/5*x-21/25)*p + (3/5*x+4/25)*q;
           3 x   21      2                3 x   4          2
(%o24)    (--- - --) (3 x  + 2 x) + (--- + --) (- 3 x  + 3 x + 2)
           5     25                       5     25

(%i25) ratexpand(%o24);
                   8
(%o25)             --
                   25
```

Bei der Bestimmung eines ggT für Polynome kommt nicht auf einen skalaren Faktor an. Darum liefert auch Maxima

```
(%i26) gcd(p,q);
(%o26)                                    1
```

Die Darstellung der Eins wäre natürlich

$$1 = \frac{25}{8} \cdot \frac{8}{25} = \frac{25}{8}(\frac{3x}{5} - \frac{21}{25})\,p + \frac{25}{8}(\frac{3x}{5} + \frac{4}{25})\,q = (\frac{15x}{8} - \frac{21}{8})\,p + (\frac{15x}{8} + \frac{1}{2})\,q$$

Probe in Maxima:

```
(%i28) ratexpand((15/8*x-21/8)*p + (15/8*x+1/2)*q);
(%o28)          1
```

2 Gruppe

Aufgabe 1:
(aus einem früheren Tutorium)
Gegeben sei eine Menge $A = \{e, a, b\}$ aus drei Elementen und eine Verknüpfung $\circ$ auf A, die durch folgende Verknüpfungstafel gegeben ist:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	a
b	b	a	e

Warum ist $(A, \circ)$ keine Gruppe?

Lösung:
Es gibt ein neutrales Element, außerdem ist $e = e^{-1}, a = a^{-1}, b = b^{-1}$. Somit existieren die Inversen. Allerdings besitzt wegen Zeile 2 die Gleichung $ax = a$ zwei Lösungen, was bei einer Gruppe nicht möglich ist. Es muss also die Assoziativität verletzt sein. Tatsächlich rechnet man nach:

$$a \circ (a \circ b) = b \circ a = a$$
$$(a \circ a) \circ b = e \circ b = b$$

und erhält einen Widerspruch zur Assoziativität.