Mathematik für die Fachrichtung Informationswirtschaft I

Prof. Dr. Andreas Rieder, PD Dr. Nicolas Neuss

3. Übungsblatt

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4: \; 2^n < n!$,

c) Geometrische Summenformel: Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}: \; \forall n \in \mathbb{N}_0: \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

d) Bernoullische Ungleichung: Sei $p \in \mathbb{R}, p \geq -1: \; \forall n \in \mathbb{N}_0: \; 1 + np \leq (1+p)^n$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Wir betrachten die Menge $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit den Operationen

$$+_M : M \times M \to M\,, \quad (x, y) \mapsto (x + y) \mod n$$

und

$$\cdot_M : M \times M \to M\,, \quad (x, y) \mapsto (x \cdot y) \mod n$$

wobei $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$ bezeichnen, und $z \mod n$ der Rest ist, der sich bei der Division einer natürlichen Zahl z durch n ergibt, z.B. $12 \mod 5 = 2$.

a) (4 Punkte) In der Vorlesung wurde der Fall $n = 2$ betrachtet. Geben Sie Additions- und Multiplikationstabelle von M im Fall $n = 3$ und $n = 4$ an.

b) (2 Punkte) In vielen Computersprachen werden natürliche Zahlen in genau dieser Weise modelliert, wobei meist $n = 2^k$ ist (z.B. $k = 8$ für den Zahltyp `unsigned char` in C, und $k = 16, 32, 64$ für größere Zahlen). Warum ist aber M mit den obigen Operationen für $n = 2^k$ und $k > 1$ *kein* Körper? Hinweis: Schauen Sie sich Ihre Tabellen im Fall $n = 4$ an.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Für ab^{-1} mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schreiben wir auch $\frac{a}{b}$. Beweisen Sie aus den Körperaxiomen $(A1) - (A5)$ der Vorlesung für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $(b, d \neq 0)$ die folgenden Regeln der Bruchrechnung:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$,

b) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$,

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,

d) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, $(c \neq 0)$.

Abgabe: Werfen Sie Ihre Löungen bis zum **20.11.2006**, **11.00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Mathematik I für Informationswirte“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zi. 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Gruppe (A-D) sowie Ihre/n Tutor/-in.