1 Potentialströmungen

Eine Potentialströmung in $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D = 2, 3$, wird durch den (hydrostatischen) Druck

$$p\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

den Fluss

$$q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$$

und das Materialgesetz (Darcy)

$$q = -\kappa\nabla(p + G)$$

beschrieben. Dabei ist κ der Permeabilitätstensor und G das Gravitationspotential.
Im Folgenden verwenden wir die Hilfsgröße $u = p + G$, d.h., $q = -\kappa\nabla(p + G) = -\kappa\nabla u$.

Auf dem Rand $\partial\Omega = \Gamma_\mathrm{D} \cup \Gamma_\mathrm{N}$ werden Randdaten

$$u_\mathrm{D}\colon \Gamma_\mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

$$g_\mathrm{N}\colon \Gamma_\mathrm{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

für die Randbedingungen $u = u_\mathrm{D}$ auf Γ_D und $q \cdot n = g_\mathrm{N}$ auf Γ_N vorgegeben.

Aus der Bilanzgleichung

$$\int_{\partial Y} q \cdot n \,\mathrm{d}a = 0 \quad \text{für jedes Teilvolumen } Y \subset \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{div} q = 0$$

ergibt sich für jede Testfunktion $\phi\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi = 0$ auf Γ_D die Variationsgleichung für u

$$\int_\Omega \kappa\nabla u \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g_\mathrm{N}\phi \,\mathrm{d}a\,.$$

2 Lineare und bilineare Finite Elemente in 2D

Sei $\bar\Omega = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} \bar K$ eine Zerlegung in Drei- und Vierecke $\bar K = \operatorname{conv} \mathcal{V}_\tau$.

(2.1) Eine Zerlegung heißt *zulässig*, wenn

$$\operatorname{conv}(\mathcal{V}_K \cap \operatorname{conv} \mathcal{V}_{K'}) = \operatorname{conv} \mathcal{V}_K \cap \operatorname{conv} \mathcal{V}_{K'} \text{ für } K, K' \in \mathcal{K}\,.$$

Zu jedem Drei- oder Viereck $K \in \mathcal{K}$ sei $\hat K = \operatorname{conv} \hat{\mathcal{V}}$ das Referenzdreieck oder -viereck. In $\hat K$ bestimme eine Knotenbasis $\hat\lambda_j$ mit $\hat\lambda_j(\hat z_k) = \delta_{jk}$ für $\hat z_k \in \hat{\mathcal{V}}$. Setze $\hat V = \operatorname{span}\{\hat\lambda_j\}$. Sei $\varphi_K \colon \hat K \longrightarrow \bar K$ und $V_K = \{\hat\lambda \circ \varphi_K^{-1} \colon \hat\lambda \in \hat V\}$. Setze $\mathcal{V}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} \mathcal{V}_K = \{z_1, ..., z_N\}$.

Definiere $V_h = \{\phi_h \colon \phi_h|_K \in V_K\}$ und $V_h(u) = \{\phi_h \in V_h \colon \phi_h(z) = u(z) \text{ für } z \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \cap \Gamma_{\mathrm{D}}\}$. Die Finite-Elemente-Lösung $u_h \in V_h(u_{\mathrm{D}})$ ist durch die Variationsgleichung

$$\int_\Omega \kappa \nabla u_h \cdot \nabla \phi_h \,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}} \phi_h \,\mathrm{d}a\,, \qquad \phi_h \in V_h(0)$$

definiert. Sei $\lambda_1, ..., \lambda_N \in V_h$ eine Knotenbasis mit $\lambda_n(z_k) = \delta_{nk}$ und $u_h = \sum \underline{u}[n]\lambda_n$. Dann gilt $\underline{A}\,\underline{u} = \underline{b}$ mit

$$\underline{A}[n,k] = \int_\Omega \kappa \nabla \lambda_k \cdot \nabla \lambda_n \,\mathrm{d}x\,, \qquad \underline{b}[n] = \int_{\partial\Omega} g_{\mathrm{N}} \lambda_n \,\mathrm{d}a$$

für $n \notin \mathcal{I}_{\mathrm{D}} = \{n \colon z_n \in \Gamma_{\mathrm{D}}\}$. Für $n \in \mathcal{I}_{\mathrm{D}}$ setze $\underline{A}[n,k] = \delta_{nk}$ und $\underline{b}[n] = u_{\mathrm{D}}(z_n)$.

(2.2) Sei κ symmetrisch und uniform positiv definit (d.h. $\kappa y \cdot y \geq \kappa_0 |y|^2$ mit $\kappa_0 > 0$). Sei $\mathcal{I}_D \neq \emptyset$. Dann ist $\underline{A}$ regulär und auf $\underline{V}(0) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^N \colon \underline{v}_n = 0 \text{ für } n \in \mathcal{I}_{\mathrm{D}}\}$ symmetrisch positiv definit.

3 Lösung dünn besetzter Gleichungssysteme

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Bestimme eine Lösung $u \in \mathbb{R}^N$ von $Au = b$.
Sei $I = \{1, \dots, N\}$ die Indexmenge und $G_A = \{(n,k) \in I \times I \colon A[n,k] \neq 0\}$ der Matrixgraph.

(3.1) Matrizen A heißt *dünn besetzt*, wenn $|G_A| \le C\,N$ (mit $C > 0$ unabhängig von N).

(3.2) Sei $I_K = \{n \in I \colon z_n \in \mathcal{V}_K\}$ und $\max_n |\{K \colon n \in \mathcal{V}_K\}| \le C$. Dann gilt:

a) $G_A \subset \bigcup I_K \times I_K$ und $|G_A| \le C(N+1)$.
b) Matrix-Vektor-Multiplikation und Assemblieren benötigen $\mathcal{O}(N)$ Operationen.
c) Das *compressed row storage format* benötigt $\mathcal{O}(N)$ Arbeitsspeicher.

Sei $I = I_1 \cup \dots \cup I_P \cup I_\Gamma$ eine disjunkte Zerlegung mit Blockmatrizen A_{pq}, und $A_{p\Gamma}$, $A_{\Gamma p}$, $A_{\Gamma\Gamma}$.
Eine solche Zerlegung ergibt sich durch eine nichtüberlappende Gebietszerlegung
$\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \dots \cup \Omega^P \cup \Gamma$ mit Interface Γ.

(3.3) Sei $A_{pq} = 0$ für $p \neq q$.
Wenn A symmetrisch positiv definit ist, dann ist auch das *Schurkomplement*

$$S = A_{\Gamma\Gamma} - \sum A_{\Gamma p} A_{pp}^{-1} A_{p\Gamma}$$

symmetrisch positiv definit, und für $u = A^{-1} b$ gilt

$$\begin{aligned} u_\Gamma &= S^{-1}\Big(b_\Gamma - \sum A_{\Gamma p} A_{pp}^{-1} b_p\Big)\,, \\ u_p &= A_{pp}^{-1}\big(b_p - A_{p\Gamma} u_\gamma\big)\,. \end{aligned}$$

3 Subspace Correction Methods

Seien $R_p \in \mathbb{R}^{N_0 \times N}$ Restriktionsmatrizen mit $N_p < N$ ($p = 1, \dots, P$) und $A_p = R_p A R_p^T$.
Wähle Vorkonditionierer $B_p \in \mathbb{R}^{N_p \times N_p}$
$B_p = A_p^{-1}$, $B_p = \mathrm{diag}(A_p)^{-1}$ (Jacobi), oder $B_p = \big(\mathrm{diag}(A_p) + \mathrm{lower}(A_p)\big)^{-1}$ (Gauss-Seidel).

P0) wähle u^0, berechne $r^0 = b - Au^0$, wähle $\varepsilon > 0$ und $\theta > 0$, setze $k = 0$
P1) falls $|r^k| \le \varepsilon$ STOP
P2) berechne $c_p = B_p R_p r^k$ für alle p und $c^k = \sum R_p^T c_p$ (additiv)
P3) berechne $u^{k+1} = u^k + \theta c^k$ und $r^{k+1} = r^k - \theta A c^k$
P4) setze $k := k + 1$ und gehe zu P1).

In der multiplikativen Variante von P2) berechne $c_p = B_p R_p \Big(r^k - A \sum_{q=1}^{p-1} R_q^T c_q\Big)$.

(3.4) Sei $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit $u^{k+1} = u^k + \theta B r^k$.
Dann gilt $B = \sum R_p^T B_p R_p$ (additiv) bzw. $(I_N - BA) = \prod (I_N - R_p^T B_p R_p A)$ (multiplikativ).
Wenn A und B_p symmetrisch positiv definit sind, dann existiert $\theta_0 > 0$, so dass
$\rho = \rho(I_N - \theta BA) < 1$ für alle $\theta \in (0, \theta_0)$ und $|u - u^k|_A \le \rho^k |u - u^0|_A$ für $|y|_A = \sqrt{y^\top A y}$.

(3.5) a) Seien A, B sym. pos. def. mit $\alpha y^\top A y \le y^\top ABA y \le C\, y^\top A y$.
Dann gilt für das CG-Verfahren $|u - u^k|_A \le 2\Big(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\Big)^k |u - u^0|_A$ mit $\kappa = \frac{C}{\alpha}$.

b) Es gelte $\alpha y^\top y < y^\top AB y$ und $\|AB\|_2 \le C$.
Dann gilt für das GMRES-Verfahren $|u - u^k|_2 \le \kappa_2(AB)\Big(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\Big)^{k/2} |u - u^0|_2$.

3 Twolevel Methods

Sei $R_0 \in \mathbb{R}^{N_0 \times N}$ die Restriktion auf einen Unterraum.

(3.6) Sei $A_0 = R_0 A R_0^\top$ das Galerkin-Produkt, und sei A symmetrisch positiv definit.

Dann ist $P_0 = R_0^\top A_0^{-1} R_0 A$ eine Orthogonalprojektion bzgl. $\langle y, z \rangle_A = y^\top A z$.

Z0) wähle u^0, berechne $r^0 = b - Au^0$, wähle $\varepsilon > 0$ und $\theta > 0$, setze $k = 0$

Z1) falls $|r^k| \leq \varepsilon$ STOP

Z2) berechne $c_0^k = A_0^{-1} R_0 r^k$

Z3) berechne $c^k = R_0^\top c_0^k + B(r^k - A R_0^\top c_0^k)$

Z3) berechne $u^{k+1} = u^k + c^k$ und $r^{k+1} = r^k - Ac^k$

Z4) setze $k := k + 1$ und gehe zu Z1).

(3.7) a) Es gilt $u - u^{k+1} = (I_N - BA)(I_N - P_0)(u - u^k)$.

b) A und B seien symmetrisch positiv definit mit $\|BA\|_A \leq 1$ und $v^\top A v \leq C\, v^\top ABA v$ für alle $v \in \mathcal{N}(P_0)$, d.h., $P_0 v = 0$. Dann gilt

$$\|(I_N - BA)(I_N - P_0)(u - u^k)\|_A \leq \sqrt{1 - 1/C}\,.$$

3 Multilevel Methods

Seien $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_J$ Finite-Elemente-Räume mit $h_j = h_0^{-j}$, $j = 0, \dots, J$.
Seien $A_j \in \mathbb{R}^{N_j \times N_j}$ die Finite-Elemente-Matrizen und $B_j \in \mathbb{R}^{N_j \times N_j}$ Vorkonditionierer.
Seien $R_j \in \mathbb{R}^{N_j \times N_{j+1}}$ die Restriktionen mit $A_j = R_j A_{j+1} R_j^\top$.

M0) wähle u_J^0, berechne $r_J^0 = b_J - A_J u_J^0$, wähle $\varepsilon > 0$ und $\theta > 0$, setze $k = 0$

M1) falls $|r_J^k| \le \varepsilon$ STOP

M2) setze $j = J$ und $r_J = r_J^k$

M3) für $\nu = 1, \cdots \nu_1$ berechne $w_j = B_j r_j$, $c_j := c_j + w_j$, $r_j := r_j - A_j w_j$

M4) setze $j := j - 1$

M5) restringiere $r_j = R_j r_{j+1}$

M6) falls $j > 0$, gehe zu M3).

M7) berechne $c_0 = A_0^{-1} r_0$

M8) setze $j := j + 1$

M9) interpoliere $c_j := c_j + R_{j-1}^\top c_{j-1}$, $r_j := r_j - A_j R_{j-1}^\top c_{j-1}$

M10) für $\nu = 1, \cdots \nu_2$ berechne $w_j = B_j r_j$, $c_j := c_j + w_j$, $r_j := r_j - A_j w_j$

M11) falls $j < J$, gehe zu M8).

M12) berechne $u^{k+1} = u^k + c_J$ und $r^{k+1} = r^k - A c_J$

M13) setze $k := k + 1$ und gehe zu M1).

4 Gemischte Finite Elemente

Betrachte das System

$$\operatorname{div} q = 0\,, \qquad q = -\kappa\nabla u \qquad \text{in } \Omega$$

mit den Randbedingungen

$$u = u_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}}\,, \qquad q\cdot n = -g_{\mathrm{N}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}}\,.$$

Sei $\mathcal{K}$ eine zulässige Triangulierung und $\mathcal{F}$ die Seiten $\bar{F} = \partial K \cap \partial K'$ bzw. $F \subset \partial K \cap \partial\Omega$.

Im Referenzdreieck oder -viereck definiere $\hat{W} = \operatorname{span}\{\hat{\psi}_j\}$ mit Vektorfeldern $\hat{\psi}_j$ zu jeder Elementseite $\hat{F}_j$ mit $\int_{\hat{F}_k} \hat{\psi}_j \cdot n\,\mathrm{d}a = \delta_{jk}$. Sei $\varphi_K \colon \hat{K} \longrightarrow \bar{K}$ und $W_K = \{\mathrm{D}\varphi_K\hat{\phi}\circ\varphi_K^{-1} \colon \hat{\phi} \in \hat{W}\}$.
Zu jeder Seite $F_n \in \mathcal{F}$ sei ψ_n das Vektorfeld mit $\int_{F_k} \hat{\psi}_n \cdot n_{F_k}\,\mathrm{d}a = \delta_{kn}$ und $\psi_n|_K \in W_K$.

Definiere $W_h = \{\psi_n \colon F_n \in \mathcal{F}\}$ und $W_h(g) = \{\psi_h \in W_h \colon \int_F \psi_h \cdot n\,\mathrm{d}a = \int_F g\,\mathrm{d}a \text{ für } F \subset \Gamma_{\mathrm{N}}\}$.

(4.1) Definiere $Q_h = \mathbb{P}_0(\Omega_h) = \prod_K \mathbb{P}_0(K)$. Die gemischte Finite-Elemente-Lösung $(q_h, u_h) \in W_h(-g_{\mathrm{N}}) \times Q_h$ ist durch das Sattelpunkt-Problem

$$\begin{aligned} \int_\Omega \kappa^{-1} q_h \cdot \psi_h \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u_h \operatorname{div}\psi_h\,\mathrm{d}x &= -\int_{\Gamma_{\mathrm{D}}} u_{\mathrm{D}}\psi_h \cdot n\,\mathrm{d}a\,, \\ \int_\Omega \operatorname{div} q_h \phi_h \,\mathrm{d}x &= 0\,, \qquad (\psi_h,\phi_h) \in W_h(0)\times Q_h \end{aligned}$$

definiert. Für die analytische Lösung q und für Finite-Elemente-Lösungen $q_h \in W_h$ und $u_h \in V_h$ mit $u_h = u_{\mathrm{D}}$ auf Γ_{D} und $q_h \cdot n = g_{\mathrm{N}}$ auf Γ_{N} gilt die Fehlerabschätzung

$$\|q - q_h\|_{\kappa^{-1}} \le \|\kappa\nabla u_h - q_h\|_{\kappa^{-1}} \qquad \text{mit } \|\psi\|^2_{\kappa^{-1}} = \int_\Omega \kappa^{-1}\psi\cdot\psi\,\mathrm{d}x\,.$$

4 Gemischte und hybride Finite Elemente

(4.2) Sei $W_{\mathcal{K}} = \prod_K W_K$, $M_h = \prod_F \mathbb{P}_0$, $M_h(u) = \{\mu_h \in M_h \colon \int_F \mu_h \,\mathrm{d}a = \int_F u \,\mathrm{d}a\,,\ F \subset \Gamma_{\mathrm{D}}\}$.

a) Es gilt für $\psi_h \in W_{\mathcal{K}}$:
$$\psi_h \in W_h(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega \operatorname{div}\psi_h \phi_h \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \psi_h \cdot \nabla\phi_h \,\mathrm{d}x \text{ für alle } \phi_h \in V_h(0)\,.$$

b) Für $q_h \in W_h$ sei $\int_\Omega \operatorname{div}\psi_h\phi_h \,\mathrm{d}x = 0$ für alle $\phi_h \in Q_h$. Dann gilt
$$\int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} q_h \cdot n \,\mathrm{d}a = -\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} q_h \cdot n \,\mathrm{d}a$$
mit $\Gamma_{\mathrm{in}} = \overline{\{x \in \partial\Omega \colon q_h(x)\cdot n(x) \le 0\}}$ und $\Gamma_{\mathrm{out}} = \overline{\{x \in \partial\Omega \colon q_h(x)\cdot n(x) \ge 0\}}$.

c) Für $u_h \in V_h$ und $\lambda_h \in M_h$ sei
$$\int_K \operatorname{div}\psi_K u_h \,\mathrm{d}x + \int_K \psi_K \nabla u_h \,\mathrm{d}x = \int_{\partial K} \lambda_h\phi_h \cdot n \,\mathrm{d}a \text{ für alle } \psi_K \in W_K\,.$$
Dann gilt $\int_F \lambda_h \,\mathrm{d}a = \int_F u_h \,\mathrm{d}a$ für $F \in \mathcal{F}_K$.

(4.3) Es ist äquivalent:

(1) $(q_h, u_h) \in W_h(-g_{\mathrm{N}}) \times Q_h$ löst das Sattelpunkt-Problem (4.1).

(2) $(q_h, u_h, \lambda_h) \in W_{\mathcal{K}} \times Q_h \times M_h(-u_{\mathrm{D}})$ löst das Sattelpunkt-Problem
$$\begin{aligned}
\int_K \kappa^{-1} q_h \cdot \psi_h \,\mathrm{d}x - \int_K u_h \operatorname{div}\psi_h \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial K} \lambda_h \psi_K \cdot n \,\mathrm{d}a && \text{für alle } \psi_K \in W_K \\
\int_K \operatorname{div} q_h \,\mathrm{d}x &= 0 && \text{für alle } K \in \mathcal{K} \\
\sum_K \int_{\partial K} q_h \cdot n\, \mu_h \,\mathrm{d}a &= -\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\, \mu_h \,\mathrm{d}a && \text{für alle } \mu_h \in M_h(0)\,.
\end{aligned}$$

5 Finite Volumen für die lineare Transportgleichung

Zu gegebenem Fluss $q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ mit $\operatorname{div} q = 0$ bestimme die Dichte $\rho\colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho q) = 0 \text{ in } [0,T]\,, \qquad \rho(0) = \rho_0\,,$$

und mit der Einfluss-Randbedingung

$$\rho = \rho_{\mathrm{in}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{in}} = \{x \in \partial\Omega\colon\, q\cdot n < 0\}\,.$$

Sei $\Psi(\rho) = \rho q$ der Fluss und definiere M, A, b durch

$$(M\rho,\phi)_\Omega = \int_\Omega \rho\phi \mathrm{d}x\,,\ (A\rho,\phi)_\Omega = -(\operatorname{div}\Psi(\rho),\phi)_\Omega + (\Psi(\rho)\cdot n,\phi)_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\,,\ (b,\phi)_\Omega = -(\Psi(\rho_{\mathrm{in}})\cdot n,\phi)_{\Gamma_{\mathrm{in}}}\,.$$

Dann gilt $(M\partial_t\rho,\phi)_\Omega = (A\rho + b,\phi)_\Omega$ für alle $\phi \in L_2(\Omega)$ und $t \in (0,T)$.

Definiere $Q_h = \prod_K \mathbb{P}_0(K)$ (finite Volumen) bzw. $Q_h = \prod_K \mathbb{P}_k(K)$ (discontinuous Galerkin).

Definiere M_h, A_h, b_h durch $(M_h\rho_h,\phi_h)_\Omega = (M\rho_h,\phi_h)_\Omega$, $(b_h,\phi_h)_\Omega = (b,\phi_h)_\Omega$, und

$$(A_h\rho_h,\phi_h)_\Omega = \Big(\sum_K -(\operatorname{div}\Psi(\rho_h),\phi_h)_K + \sum_{F\subset\partial K\setminus\Gamma_{\mathrm{in}}} \big((\Psi(\rho_K) - \Psi^*_{K,F}(\rho_h))\cdot n_K,\phi_h\big)_F\Big) + (\Psi(\rho_h)\cdot n,\phi_h)_{\Gamma_{\mathrm{in}}}$$

mit dem numerischen Fluss auf $F = \partial K \cap \partial K_F$

$$\Psi^*_{K,F}(\rho_h) = \Psi(\rho_K) \text{ falls } q\cdot n_K > 0\,, \qquad \Psi^*_{K,F}(\rho_h) = \Psi(\rho_{K_F}) \text{ falls } q\cdot n_K < 0$$

und $\Psi^*_{K,F}(\rho_h) = 0$ für $F \subset \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathrm{in}}$.

5 Lineare Transportgleichung: Zeitintegration

Die $M_h \partial_t \rho_h = A_h \rho_h$ wird von $\rho_h(t_{n+1}) = \exp(\triangle t\, M_h^{-1} A_h)\rho_h(t_n)$ gelöst ($t_n = n\triangle t$).

Klassisches explizites Runge-Kutta-Verfahren

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^n + \triangle t\, M_h^{-1} A_h\big(\rho_h^n + \tfrac{1}{2}\triangle t\, M_h^{-1} A_h\big(\rho^n + \tfrac{1}{3}\triangle t\, M_h^{-1} A_h\big(\rho^n + \tfrac{1}{4}\triangle t\, M_h^{-1} A_h\, \rho_h^n\big)\big)\big)$$

Implizite Mittelpunktsregel

$$\rho_h^{n+1} = \rho_h^n + \triangle t\, \big(M_h - \tfrac{\triangle t}{2} A_h\big)^{-1} A_h\, \rho_h^n$$

Polynomiale Krylov-Raum-Methode

$$\rho_h^{n+1} = V_m \exp(\triangle t\, H_m) V_m^\top M_h \rho_h^n \quad \text{mit } H_m = V_m^\top A_h V_m \in \mathbb{R}^{m\times m},\ m \ll N$$

Dazu berechne eine M-orthogonale Basis $\mathbf{v}_j$ des Krylov-Raums

$$\operatorname{span}\{\rho_h^n, M_h^{-1} A_h \rho_h^n, \dots, (M_h^{-1} A_h)^{m-1} \rho_h^n\}\,,$$

d.h. für die Matrix $V_m = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ gilt $V_m M_h V_m^\top = I_m$.
Die Galerkin-Approximation $H_m = V_m^\top A_h V_m$ von A_h ist eine Hessenbergmatrix.

5 Die lineare Transportgleichung

(5.1) Für die lineare Transportgleichung gilt die Massenbilanz

$$\int_\Omega \rho(t)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \rho_0\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} \rho_{\mathrm{in}}|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t} - \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \rho|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t}\,.$$

(5.2) Für die finite-Volumen-Approximation $\rho_h \in \prod \mathbb{P}_0(K)$ mit upwind-flux gilt die Massenbilanz

$$\int_\Omega \rho_h(t)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \rho_0\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} \rho_{\mathrm{in}}|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t} - \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \rho_h|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t}\,.$$

(5.3) Sei $\rho_0 \ge 0$ und $\rho_{\mathrm{in}} \ge 0$. Dann gilt für die die FV-Approximation mit upwind-flux $\rho_h \ge 0$.

(5.4) Für die lineare Transportgleichung gilt die Energiebilanz

$$\int_\Omega |\rho(t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\rho_0|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} |\rho_{\mathrm{in}}|^2|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t} - \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} |\rho|^2|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t}\,.$$

(5.5) Für die DG-Approximation $\rho_h \in \prod \mathbb{P}_k(K)$ mit upwind-flux gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\rho_h(t)|^2\,\mathrm{d}x \quad &= \quad \int_\Omega |\rho_0|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{in}}} |\rho_{\mathrm{in}}|^2|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t} - \int_0^t \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} |\rho_h|^2|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t} \\ &\quad - \sum_{F\in\mathcal{F}_h\cap\Omega} \int_0^t \int_F |\rho_K - \rho_{K_F}|^2|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t} - \int_0^t \int_F |\rho_{\mathrm{in}} - \rho_h|^2|q\cdot n|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tilde{t}\,.\end{aligned}$$

6 Die Konvektions-Diffusions-Reaktionsgleichung

Zu gegebenem Fluss $q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ mit $\operatorname{div} q = 0$, Diffusionstensor $\kappa_c\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{D\times D}$ und Reaktionsrate $r\colon \Omega \times [0,t] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimme die Konzentration $c\colon \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\partial_t c - \operatorname{div}(\kappa_c \nabla c - cq) = r(c) \;\text{ in }\; [0,T]\,, \qquad c(0) = c_0\,,$$

mit den Randbedingungen

$$c = c_{\mathrm{D}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{D}} \times [0,T]\,, \quad \kappa_c \nabla c \cdot n = g_{\mathrm{N}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{N}} \times [0,T]\,, \quad \kappa_c \nabla c \cdot n + \alpha c = g_{\mathrm{R}} \text{ auf } \Gamma_{\mathrm{R}} \times [0,T]\,.$$

Definiere A und R durch

$$\begin{aligned}
(Ac,\phi)_\Omega &= \int_\Omega \big(\kappa_c \nabla c \cdot \nabla\phi + q\cdot\nabla c\phi\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} \alpha c\phi\,\mathrm{d}a\,,\\
(R(c),\phi)_\Omega &= \int_\Omega r(c)\phi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi\,\mathrm{d}a + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} g_{\mathrm{R}}\phi\,\mathrm{d}a\,.
\end{aligned}$$

(6.1) Dann gilt $(\partial_t c,\phi)_\Omega + (Ac,\phi)_\Omega = (R(c),\phi)_\Omega$ für alle ϕ mit $\phi|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = 0$ und $t \in (0,T)$.

(6.2) Sei $q\cdot n \geq 0$ auf Γ_{N}, $\alpha + \frac{1}{2} q\cdot n \geq 0$ auf Γ_{R}, $\partial_3 r \leq 0$, und κ_c uniform positiv definit.
Dann ist für alle $\triangle t_n > 0$ das diskrete Problem

$$c_h^n \in V_h(c_D(t_n))\colon \qquad \Big(\frac{1}{\triangle t}(c_h^n - c_h^{n-1}) + Ac_h^n - R(c_h^n), \phi_h\Big)_\Omega = 0\,, \qquad \phi_h \in V_h(0)$$

eindeutig lösbar und $(J_h^n(c_h)v_h,\phi_h)_\Omega = \Big(\frac{1}{\triangle t}v_h + Av_h - R'(t_n,c_h)v_h,\phi_h\Big)_\Omega$ positiv definit.

6 Die Konvektions-Diffusions-Reaktionsgleichung

Zu gegebenem $c_h \in V_h$ definiere $g_h^n(c_h) \in V_h(0)$ und $J_h^n(c_h)\colon\ V_h(0) \longrightarrow V_h(0)$ mit

$$
\begin{aligned}
(g_h^n(c_h), \phi_h)_\Omega &= \Big(\frac{1}{\triangle t}(c_h - c_h^{n-1}) + Ac_h - R(t_n, c_h), \phi_h\Big)_\Omega\,, \\
(J_h^n(c_h)v_h, \phi_h)_\Omega &= \Big(\frac{1}{\triangle t}v_h + Av_h - R'(t_n, c_h)v_h, \phi_h\Big)_\Omega\,, \qquad v_h, \phi_h \in V_h(0)\,.
\end{aligned}
$$

S0) Wähle $\triangle t > 0$, $\varepsilon, \theta > 0$, $k_{\max}, l_{\max} \in \mathbb{N}$, setze $c_h^0(z) = c_0(z)$, $t_0 = 0$ und $n = 1$

S1) setze $t_n = \min\{T, t_{n-1} + \triangle t\}$, $k = 0$ und wähle $c_h^{n,0} \in V_h(c_D(t_n))$

S2) berechne $g_h^{n,0} = g_h^n(c_h^{n,k})$ und $\varepsilon_n = \max\{\varepsilon, \theta\|g_h^{n,0}\|\}$

S3) falls $k = k_{\max}$, setze $\triangle t := 0.5\triangle t$ und gehe zu S1)

falls $\|g_h^{n,k}\| \le \varepsilon_n$, setze $c_h^n = c_h^{n,k}$

falls $t_n < T$, wähle $\triangle t > 0$, setze $n := n + 1$, gehe zu S1)

S4) berechne $J_h^{n,k} = J_h^n(c_h^{n,k})$ und löse $J_h^{n,k} d_h^{n,k} = -g_h^{n,k}$

S5) setze $l = 0$ und $s_{n,k} = 1$

S6) setze $c_h = c_h^{n,k} + s_{n,k} d_h^{n,k}$ und berechne $g_h = g_h^n(c_h)$

S7) falls $\|g_h\| < \|g_h^{n,k}\|$, setze $c_h^{n,k+1} = c_h$, $g_h^{n,k+1} = g_h$, $k := k + 1$ und gehe zu S3)

S8) falls $l = l_{\max}$, setze $\triangle t := 0.5\triangle t$ und gehe zu S1)

S9) setze $l := l + 1$, $s_{n,k} := 0.5 s_{n,k}$, und gehe zu S6)

6 Die stationäre Konvektions-Diffusions-Gleichung

Zu gegebenem Fluss $q\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^D$ mit $\operatorname{div} q = 0$, Diffusionstensor $\kappa_c\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{D\times D}$ und Reaktionsrate / Quellterm $r, f\colon \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimme die Konzentration $c\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$-\operatorname{div}(\kappa_c \nabla c - cq) + rc = f$$

mit den Randbedingungen $c = c_{\mathrm{D}}$ auf $\Gamma_{\mathrm{D}} = \Gamma_{\mathrm{in}}$ und $\kappa_c \nabla c \cdot n + q \cdot nc = 0$ auf $\Gamma_{\mathrm{R}} = \Gamma_{\mathrm{out}}$. Definiere a und b durch

$$\begin{aligned} a(c,\phi) &= \int_\Omega \big(\kappa_c \nabla c \cdot \nabla\phi + q \cdot \nabla c\phi + rc\phi\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} q \cdot n\, c\phi\,\mathrm{d}a\,,\\ b(\phi) &= \int_\Omega f\phi\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a_h(c_h,\phi_h) &= a(c_h,\phi_h) + \sum_K \delta_K \int_K \big(-\operatorname{div}(\kappa_c\nabla c) + q\cdot\nabla c + rc\big) q \cdot \nabla\phi\,\mathrm{d}x\,,\\ b_h(\phi_h) &= b(\phi_h) + \sum_K \delta_K \int_K f\, q\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

(6.3) Sei $\kappa_c y \cdot y \geq \kappa_0 |y|^2$, $\kappa_0 \ll h\|q\|_\infty$, $r \equiv r_0 > 0$. Dann gilt für $\phi_h \in V_h(0)$

$$a_h(\phi_h,\phi_h) \geq \|\phi_h\|_{\mathrm{SD}}^2 \quad \text{mit} \quad \|\phi_h\|_{\mathrm{SD}}^2 = \frac{\kappa_0}{2}\|\nabla\phi_h\|_\Omega^2 + \frac{r_0}{2}\|\phi_h\|_\Omega^2 + \sum_K \frac{\delta_K}{2}\|q\cdot\nabla\phi\|_K^2$$

bei geeigneter Wahl $\delta_K = O(h)$.

7 DG-Verfahren für die Diffusionsgleichung

Betrachte eine Potentialströmung in $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, $D = 2, 3$ mit $\operatorname{div} q = 0$ und $q = -\kappa\nabla u$ in Ω, $u = u_{\mathrm{D}}$ auf Γ_{D} und $-q \cdot n = g_{\mathrm{N}}$ auf Γ_{N}. Für unstetige Testfunktionen $\phi_h \in Q_h = \prod \mathbb{P}_p(K)$ gilt

$$\sum_K \int_K \kappa\nabla u \cdot \nabla\phi_h \,\mathrm{d}x - \int_{\partial K\setminus\Gamma_{\mathrm{N}}} \kappa\nabla u \cdot n\phi_h \,\mathrm{d}a \quad = \quad \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi_h \,\mathrm{d}a\,.$$

Setze $\{q\}_F = \frac{1}{2}(q|_K + q|_{K_F})$ und $[\phi_h]_F = n_K\phi_K + n_{K_F}\phi_{K_F}$ auf $F = \partial K \cap \partial K_F$. Es gilt

$$q|_K \cdot n_F = q|_{K_F} \cdot n_F \quad\Longrightarrow\quad q_K \cdot n_K\phi_K + q_{K_F} \cdot n_{K_F}\phi_{K_F} \quad = \quad \{q\}_F \cdot [\phi_h]_F$$

Auf $F \subset \Gamma_{\mathrm{D}}$ setze $\{q\}_F = q$ und $[\phi_h]_F = \phi_h$. Damit ergibt sich

$$\sum_K \int_K \kappa\nabla u \cdot \nabla\phi_h \,\mathrm{d}x - \sum_{F\in\mathcal{F}_h\setminus\Gamma_{\mathrm{N}}} \int_F \{\kappa\nabla u\}_F \cdot [\phi_h]_F \,\mathrm{d}a \quad = \quad \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi_h \,\mathrm{d}a\,.$$

Die DG-Approximation $u_h \in Q_h$ wird durch $a_h(u_h, \phi_h) = b_h(\phi)$ mit

$$\begin{aligned}
a_h(u_h, \phi_h) \quad &= \quad \sum_K \int_K \kappa\nabla u_h \cdot \nabla\phi_h \,\mathrm{d}x + \sum_{F\in\mathcal{F}_h\setminus\Gamma_{\mathrm{N}}} \gamma_F \int_F [u_h] \cdot [\phi_h]_F \,\mathrm{d}a \\
&\quad - \sum_{F\in\mathcal{F}_h\setminus\Gamma_{\mathrm{N}}} \int_F \Big(\{\kappa\nabla u_h\}_F \cdot [\phi_h]_F + [u_h]_F \cdot \{\kappa\nabla\phi_h\}_F\Big)\mathrm{d}a \\
b_h(\phi) \quad &= \quad \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} g_{\mathrm{N}}\phi_h \,\mathrm{d}a - \sum_{F\in\mathcal{F}_h\cap\Gamma_{\mathrm{D}}} \int_F u_{\mathrm{D}}\kappa\nabla\phi_h \cdot n \,\mathrm{d}a + \sum_{F\in\mathcal{F}_h\cap\Gamma_{\mathrm{D}}} \gamma_F \int_F u_{\mathrm{D}}\phi_h \,\mathrm{d}a
\end{aligned}$$

abhängig von $\gamma_F > 0$ definiert. Die kontinuierliche Lösung erfüllt auch $a_h(u, \phi_h) = b_h(\phi)$.