Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold

Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Sommersemester 2012

2. Übungsblatt

Abgabe spätestens am 18. 5. 2012

Aufgabe 2: (Finite Elemente auf nichtäquidstantem Gitter) (4 Punkte)
Wir betrachten das eindimensionale Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) && \text{für alle } x \in \Omega \\ u(x) &= 0 && \text{für } x = a \text{ oder } x = b \end{aligned}$$

auf dem Gebiet $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$.
Die numerische Lösung u_N des Poisson-Problems soll für $i = 1, ..., N-1$ durch die sogenannten *Hütchenfunktionen*

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{für } x \in (x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{für } x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dargestellt werden, also

$$u_N = \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \varphi_j(x),$$

wobei $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ vorgegeben sind.
Schreiben Sie ein Programm, welches wie in Abschnitt 2. 2 der Vorlesung unter Verwendung der Galerkin-Bedingung für $i, j = 1, ..., N-1$ die Lastmatrix A mit den Einträgen

$$A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

aufstellt, die Integrale der rechten Seite

$$b_i = \int_\Omega \varphi_i(x) f(x) dx$$

durch die Trapezregel approximiert und die Koeffizienten μ_i der numerischen Lösung berechnet.
Plotten Sie die numerische und die exakte Lösung für

$$f(x) = \frac{(4\varepsilon^2 + 1)(-12x^2 + 12x - 3 + 4\varepsilon^2)}{8\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon^2\right)^3} \quad \text{mit } \varepsilon = 0.025$$

und

$$N = 20, 40, 80, 160$$

jeweils zu den Gittern

$$x_n = \frac{n}{N} \quad \text{und} \quad x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(2\,\frac{n}{N} - 1\right)^3 \quad , \; n = 0, \ldots, N.$$

Hinweis: Die exakte Lösung lautet $u(x) = \frac{\varepsilon^2 + \frac{1}{4}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon^2} - 1$.

Aufgabe 3: (Rechnen mit dünnbesetzten Matrizen) (1 Punkt)
Verändern Sie Ihr Programm zur Lösung des Poisson-Problems aus Aufgabe 1 derart, dass auch numerische Lösungen auf feinen Gittern, also für hohe Werte von N, berechenbar sind. Des Weiteren darf in der Funktion `solve_pde` keine Schleife auftreten.
Die Aufgabe gilt als gelöst, falls Ihr Programm die Berechnung für $N = 500$ schafft.

Nützliche Befehle: `spdiags, speye, kron`.
Die Dokumentation zu den Befehlen erhalten Sie in Matlab mit dem Befehl `doc` (zum Beispiel: `doc spdiags`).