Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Angewandte und Numerische Mathematik**
**Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold**

# Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

**Sommersemester 2012**

**3. Übungsblatt**

Abgabe spätestens am 1. 6. 2012

**Aufgabe 4:** (Finite Elemente zu einer vorgegebenen Triangulierung) (5 Punkte)
Wir betrachten das zweidimensionale Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= 0 && \text{für alle } (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

auf der offenen Ellipsenscheibe $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 < 1\right\}$ mit

$$f(x,y) = 15xy\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2\right) - \frac{1}{2}x^3y - 8xy^3.$$

Schreiben Sie eine Funktion `solvepde`, welche zu einer vorgegebenen Triangulierung `T` auf den Punkten `P` unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode die numerische Lösung `uFEM` berechnet. Plotten Sie die numerische und die exakte Lösung zu verschiedenen Triangulierungen und erstellen Sie einen Fehlerplot, indem Sie die größte Seitenlänge eines Dreiecks gegen den geschätzten $L^2$-Fehler der numerischen Approximation plotten. Verwenden Sie für die $L^2$-Norm einer Funktion $v(x,y)$ die Schätzung

$$\int_\Omega v(x,y)d(x,y) \approx \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{3}|T_k| \cdot \left(v(P_1^k) + v(P_2^k) + v(P_3^k)\right).$$

Die Triangulierungen können von der Vorlesungswebseite heruntergeladen werden und befinden sich im Matlab-Dateiformat. Der nachfolgende Codeausschnitt zeigt, wie in Matlab die Variablen `T, P, innerP` aus den Dateien `mygrid01.mat, mygrid02.mat, ..., mygrid11.mat` geladen werden können:

```
for n=1:11
    if n>9
        filename=['mygrid',num2str(n)];
    else
        filename=['mygrid0',num2str(n)];
    end
    load(filename,'P','T','innerP')

    [uFEM,uex,errL2,h] = solvepde(T,P,innerP);
    ...
end
...
```

Dabei repräsentiert die Matrix `T` eine Triangulierung (in den Zeilen stehen die Punkte eines Dreiecks), die Matrix `P` die Knoten der Triangulierung (in den Zeilen stehen die x- und y-Koordinaten) und der Vektor `innerP` gibt an, welche Punkte der Triangulierung innere Punkte sind.

Nützliche Befehle zur Visualisierung: `trimesh` und `trisurf`.

Hinweis: Die exakte Lösung lautet $u(x,y) = xy\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2\right)^2$.