Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold

Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Sommersemester 2012

4. Übungsblatt

Abgabe spätestens am 15. 6. 2012

Aufgabe 5: (Finite Elemente mit inhomogenen Randbedingungen) (3 Punkte)
Wir betrachten das zweidimensionale Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= g_D(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in \Gamma_D \\ \partial_\eta u(x,y) &= g_N(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in \Gamma_N \end{aligned}$$

auf dem offenen Kreisring $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0.3 < \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$ mit den Randsegmenten

$$\Gamma_D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = 0.3\right\} \text{ und } \Gamma_N = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} = 1\right\},$$

sowie den Funktionen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 15xy\left(1-\frac{1}{4}x^2-y^2\right) - \frac{1}{2}x^3y - 8xy^3, \\ g_D(x,y) &= xy\left(1-\frac{1}{4}x^2-y^2\right)^2, \\ g_N(x,y) &= 2xy\left(1-\frac{1}{4}x^2-y^2\right)^2 - \left(1-\frac{1}{4}x^2-y^2\right)\left(x^3y+4xy^3\right). \end{aligned}$$

Modifizieren Sie Ihr Programm `solvepde` aus Aufgabe 4 derart, dass auch inhomogene Randbedingungen verarbeitet werden können. Das neue Programm soll als Eingabeargumente eine Triangulierung `T`, eine Punktemenge `P` und binäre Vektoren `DirichletP` und `NeumannP` besitzen. Die binären Vektoren geben dabei an, ob ein Punkt ein Element des Dirichlet- bzw. des Neumann-Randes ist. Die Triangulierung zu dieser Aufgabe ist von der Vorlesungswebseite zu laden und befindet sich in der Matlab-Datei `mygrid.mat`. Identifizieren Sie die Randpunkte dieser Triangulierung und visualisieren Sie die numerische Lösung.

Hinweise:

- Die Variablen `T` und `P` können in Matlab mit dem Befehl

  ```
  load('mygrid','P','T')
  ```

  aus der Datei `mygrid.mat` geladen werden.

- Die exakte Lösung lautet: $u(x,y) = xy\left(1-\frac{1}{4}x^2-y^2\right)^2$.