Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Patrick Krämer, M. Sc. Simon Baumstark

Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Sommersemester 2016

Übungsblatt zu finiten Differenzen für die Poisson-Gleichung

Abgabe spätestens am 04.05.2016

Aufgabe 1

Wir betrachten das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{auf } \Gamma = \bar{\Omega}\backslash\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

mit

$$f(x,y) = \sin(xy\pi)\pi^2(x^2+y^2)$$

und

$$g(x,y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x=0 \text{ oder } y=0, \\ \sin(y\pi) & \text{für } x=1, \\ \sin(x\pi) & \text{für } y=1. \end{cases}$$

a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `solve_pde.m`, welche das obige Poisson-Problem (1) für $N \in \mathbb{N}$ auf dem Gitter

$$\Omega_N = \{(x_n, y_m) : x_n = n\cdot h, y_m = m\cdot h,\ n,m \in \{1,\ldots,N-1\}\}$$

numerisch löst. Verwenden Sie dabei finite Differenzen („Fünf-Punkte-Stern“) zur Approximation des Laplace-Operators.

Für die Eingabe-/Ausgabe-Parameter verwenden Sie den Aufruf `[u,uex,err] = solve_pde(N,plotresult)`.

Berechnen Sie den numerischen Fehler `err` der numerischen Lösung `u` zur exakten Lösung `uex` in der `max`-Norm. Für `plotresult==true` soll die Lösung auch geplottet werden, andernfalls nicht.

Hinweis: Die exakte Lösung dieses Randwertproblems lautet

$u(x,y) = \sin(xy\pi)$ (Nachrechnen!).

b) Schreiben Sie ein weiteres Programm `solve_pde_convergence.m`, mit dem Sie die numerische Approximation für

$N = 10, 16, 25, 40, 64$ und 100

berechnen. Erstellen Sie einen Fehlerplot, indem Sie in einem `loglog` Plot den Fehler `err` in Abhängigkeit des zugehörigen N auftragen.