Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Patrick Krämer, M. Sc. Simon Baumstark

Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Sommersemester 2016

Übungsblatt zu linearen finiten Elementen zu einer vorgegebenen Triangulierung

Abgabe spätestens am 18.05.2016

Aufgabe 2:
Wir betrachten das zweidimensionale Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) && \text{für alle } (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= 0 && \text{für alle } (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

auf der offenen Ellipsenscheibe $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 < 1\right\}$ mit

$$f(x,y) = 15xy\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2\right) - \frac{1}{2}x^3y - 8xy^3.$$

Dieses Problem soll mit linearen finiten Elementen und verschiedenen Triangulierungen approximiert werden.

a) Schreiben Sie eine Funktion `computeAb.m`, welche die Steifigkeitsmatrix `A` und den Lastvektor `b` des sich aus der Diskretisierung der obigen Poisson-Gleichung ergebenden linearen Gleichungssystems $Ax = b$ berechnet. Zudem soll der Flächeninhalt jedes Dreiecks der Triangulierung berechnet und im Vektor `Tarea` ausgegeben werden.

   Die Funktion soll durch `[A,b,Tarea]=computeAb(T,P,EdgesDir)` aufgerufen werden.

   `T` legt fest, welche Punkte zu einem Dreieck der Triangulierung gehören, `P` enthält die Koordinaten der Punkte der Triangulierung und `EdgesDir` definiert, auf welchen Kanten Dirichlet-Randbedingungen gesetzt werden. Die Triangulierungen können von der Vorlesungswebseite heruntergeladen werden und befinden sich im Matlab-Dateiformat. Fügen Sie das Unterverzeichnis `MyGrids` in Ihren Matlab Workspace Ordner ein. Der nachfolgende Codeausschnitt zeigt, wie in Matlab die Variablen `T, P, EdgesDir` aus den Dateien `mygrid01.mat`, `mygrid02.mat`, ..., `mygrid11.mat` geladen werden können:

```
for n=1:11
if n>9
filename=['MyGrids/mygrid',num2str(n)];
else
filename=['MyGrids/mygrid0',num2str(n)];
end
load(filename,'P','T','EdgesDir')

...
end
...
```

Bitte Rückseite beachten!

b) Berechnen Sie die numerische Approximation auf jedem der bereitgestellten Gitter. Vergleichen Sie Ihre Approximation mit der exakten Lösung

$$u(x, y) = xy\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y^2\right)^2$$

und schätzen Sie den L^2-Fehler der Approximation, indem Sie das in der L^2-Norm auftretende Integral durch eine geeignete Quadraturformel ersetzen (vgl. Vorlesung). Berechnen Sie für jede der Triangulierungen die Länge der längsten Kante, d.h. den Parameter h. Plotten Sie den geschätzten L^2-Fehler gegen h in doppelt logarithmischen Achsen.

Welche Ordnung hat das Verfahren?

c) Definieren Sie einen Vektor `n_plots` der Zahlen zwischen 1 und 11 enthält (z.B. $[1\ 6\ 11]$). Für die entsprechenden Triangulierungen (also z.B. `mygrid01`, `mygrid06`, `mygrid11`) soll die exakte Lösung, die numerische Approximation und der Fehler (als Funktion in x und y) geplottet werden.