Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Patrick Krämer, M. Sc. Simon Baumstark

Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Sommersemester 2016

Übungsblatt zu Mehrgitterverfahren

Abgabe spätestens am 13.07.2016

Aufgabe 7:
Die exakte Lösung $u(x,y) = 1 - xy^3$ des Poisson-Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= 6xy && \text{für } (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= 1 - xy^3 && \text{für } (x,y) \in \Gamma \end{aligned}$$

soll mit linearen Finiten Elementen approximiert werden. Neu ist dabei, dass das lineare Gleichungssystem durch ein Mehrgitterverfahren (V-Zyklus) gelöst werden soll.

(a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
function [Tnew,Pnew,EdgesDirNew,EdgesNeuNew,R] = refine_triang(T,P,EdgesDir,EdgesNeu)
```

welche die durch `T`, `P`, `EdgesDir`, `EdgesNeu` definierte Triangulierung verfeinert. Jedes Dreieck soll in vier Dreiecke unterteilt werden, indem man die Mittelpunkte der Seiten als neue Punkte hinzufügt. Punkte, die bereits in der alten Triangulierung enthalten waren, ändern ihre Nummer nicht. Zusätzlich soll die entsprechende Restriktionsmatrix `R` berechnet werden.

Hinweis: Sie dürfen die Funktion `triag_lin2quad` (neue Version, siehe Musterlösung) in geeigneter Weise modifizieren/ergänzen.

Die Ausgangstriangulierung wird in der Datei `mygrid.mat` bereitgestellt.

(b) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
function x = gauss_seidel(A,b,x0,numit)
```

welche die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit `numit` Schritten des Gauß-Seidel-Verfahrens approximiert. Im Folgenden setzen wir immer `numit=3`.

(c) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
function uhat = mgv(L,Acell,b,uhat,Rcell,numit)
```

welche das Mehrgitterverfahren (V-Zyklus) ausführt. Sinn und Form der Eingabeparameter wurde in der Vorlesung erklärt.

(d) Schreiben Sie ein Matlab-Programm namens `aufgabe07.m`, das folgendes tut:

- Verfeinerung der Ausgangstriangulierung durch rekursive Anwendung von `refine_triang`. Insgesamt soll das Mehrgitterverfahren auf fünf verschiedenen Gittern (d.h. $L = 0, 1, 2, 3, 4 = L_{\max}$) arbeiten.

- Aufstellen des LGS auf dem feinsten Gitter, Lösung mit Cholesky, Approximation des L^2-Fehlers der Cholesky-Lösung.
- Berechnung des Startvektors für das Mehrgitterverfahren durch geschachtelte Iteration. Berechnung des L^2-Fehlers des Startwerts.
- Approximation der Lösung durch das Mehrgitterverfahren mit drei vollen V-Zyklen. Am Ende jedes V-Zyklusses soll der L^2-Fehler der aktuellen Approximation ausgegeben werden.

Sie müssen die numerische oder exakte Lösung des Poisson-Problems nicht visualisieren. Es genügt, dass Sie die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens beobachten.

Beachten Sie die in der Vorlesung gegebenen Hinweise zur Programmierung.