Einführung in das Wissenschaftliche Rechnen

Tobias Jahnke, Simon Baumstark, Patrick Krämer

Sommersemester 2016

Organisatorisches: Siehe Folien

1. Die Methode der Finiten Differenzen für elliptische PDEs

Modellproblem: Poisson-Gleichung auf dem Einheitsquadrat

$$(P)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u = g & \text{auf Rand } \overline{\Omega}\setminus\Omega \end{cases} \qquad \text{(Dirichlet-RB)}$$

$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$ Laplace-Operator

$f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g: \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig

Eine Funktion $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt klassische Lösung von (P), falls $u: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ist und u (P) erfüllt.

Annahme: Eine klassische Lösung existiert.

Eindeutigkeit folgt aus Maximumsprinzip.

Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, setze $h = \frac{1}{N}$, $x_n = nh$, $y_m = mh$.

Notation: Definiere

- $\Omega_h := \{(x_n, y_m) : n, m \in \{1, \dots, N-1\}\}$ innere Gitterpunkte
- $\overline{\Omega_h} := \{(x_n, y_m) : n, m \in \{0, \dots, N\}\}$ alle Gitterpunkte
- $\Gamma_h := \overline{\Omega_h} \setminus \Omega_h := \{(x_n, y_m) : n \in \{0, N\} \text{ oder } m \in \{0, N\}\}$

  Gitterpunkte auf dem Rand

③

- $F(\Omega_h) := \{ v : \Omega_h \to \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ Funktionen auf dem diskretisierten Gebiet

- Für Funktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}$ sei $v|_{\Omega_h} : \Omega_h \to \mathbb{R}$ die Auswertung an den Gitterpunkten, d.h.

$$v|_{\Omega_h}(x_n, y_m) = v(x_n, y_m)$$

- Entsprechende Definitionen für $\overline{\Omega_h}$ bzw. Γ_h anstelle von Ω_h.

Für $(x_n, y_m) \in \Omega_h$ gilt

$$\begin{aligned} -\Delta u(x_n, y_m) &= -\frac{u(x_{n+1}, y_m) - 2u(x_n, y_m) + u(x_{n-1}, y_m)}{h^2} \\ &\quad - \frac{u(x_n, y_{m+1}) - 2u(x_n, y_m) + u(x_n, y_{m-1})}{h^2} + O(h^2) \\ &= f(x_n, y_m) \end{aligned}$$

Lasse den $O(h^2)$-Term weg und definiere Approximation ④
$u_h : \overline{\Omega_h} \to \mathbb{R}$ als Lösung des diskretisierten Problems

$$(P_h) \quad \begin{cases} -\Delta_h u_h = f|_{\Omega_h} & \text{auf } \Omega_h \\ u_h = g|_{\Gamma_h} & \text{auf } \Gamma_h \end{cases}$$

mit dem diskreten Laplace-Operator $\Delta_h : F(\overline{\Omega_h}) \to F(\Omega_h)$ definiert durch

$$(\Delta_h u_h)(x_n, y_m) = \frac{1}{h^2}\Big(u_h(x_{n+1}, y_m) + u_h(x_{n-1}, y_m) + u_h(x_n, y_{m-1}) + u_h(x_n, y_{m+1}) - 4u_h(x_n, y_m) \Big)$$

„Fünf-Punkte-Stern"

$$\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{matrix}$$

Dies ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$-A_h v_h = b_h$$

mit $v_h \in \mathbb{R}^L$, $(v_h)_{(m-1)\cdot(N-1)+n} = u_h(x_n, y_m)$, $L = (N-1)^2$

Beispiel ($N=4$):

$$v_h = \big(u_h(x_1,y_1),\ u_h(x_2,y_1),\ u_h(x_3,y_1),\ u_h(x_1,y_2),\ u_h(x_2,y_2),\ u_h(x_3,y_2),\ u_h(x_1,y_3),\ u_h(x_2,y_3),\ u_h(x_3,y_3)\big)^T \in \mathbb{R}^9$$

$$A_h = I_{N-1} \otimes M + M \otimes I_{N-1} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} B & I & & \\ I & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ & & I & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}, \quad M = +\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$$

$$\beta_h(x_n, y_m) = f(x_n, y_m) + \frac{1}{h^2}\begin{cases} g(0, y_m) & \text{falls } n=1,\ m \notin \{1, N-1\} \\ g(1, y_m) & \text{falls } n = N-1,\ m \notin \{1, N-1\} \\ g(x_n, y_0) & \text{falls } m = 1,\ n \notin \{1, N-1\} \\ g(x_n, y_N) & \text{falls } m = N-1,\ n \notin \{1, N-1\} \\ g(0, y_1) + g(x_1, 0) & \text{falls } n = m = 1 \\ g(0, y_{N-1}) + g(x_1, 1) & \text{falls } n = 1,\ m = N-1 \\ \vdots & \\ 0 & \text{falls } n \notin \{1, N-1\},\ m \notin \{1, N-1\} \end{cases}$$

$b_h \in \mathbb{R}^L$, $(b_h)_{(m-1)\cdot(N-1)+n} = \beta_h(x_n, y_m)$

Man kann zeigen, dass $-A_h$ positiv definit ist $\Rightarrow$ eindeutige Lösung des Gleichungssystems. Lösung durch Cholesky-Zerlegung, CG-Verfahren oder Krylov-Verfahren.